

Capítulo 1

Matrices

1.1. Matrices.

Definición 1.1: Matriz de orden $m \times n$. Igualdad de matrices.

Una **matriz** A de **orden** (tamaño) $m \times n$ (con $m, n \in \mathbb{N}$) con elementos en un cuerpo $\mathbb{K}$ a unos valores de $\mathbb{K}$ ordenados en m filas y n columnas.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

Llamamos **entrada** (i, j) , y se denotará por a_{ij} ó $[A]_{ij}$, al elemento que se encuentra en la **fila** i -ésima y en la **columna** j -ésima.

Al conjunto de todas las matrices de un orden $m \times n$ dado con elementos de un cuerpo $\mathbb{K}$ se lo denotará por $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$.

Dos matrices A y B son **iguales** cuando tienen el mismo número de filas m y columnas n , y todas sus entradas son iguales:

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i = 1, \dots, m \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (1.2)$$

Definición 1.2: Matrices fila ó columna.

Llamamos **matrices fila** a las matrices de cualquiera de los espacios de matrices $\mathcal{M}_{1 \times n}(\mathbb{K})$, sea cual sea n .

Llamamos **matrices columna** a las matrices de cualquiera de los espacios de matrices $\mathcal{M}_{m \times 1}(\mathbb{K})$, sea cual sea m .

Definición 1.3: Matrices cuadrada ó de orden n .

Llamamos **matriz cuadrada** a las matrices de $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$, para cualquier n .

Llamamos **matriz cuadrada de orden n** dado a las matrices cuadradas de tamaño $n \times n$ específicamente.

$$\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad (1.3)$$

Definición 1.4: Diagonal principal, subdiagonal y superdiagonal de una matriz cuadrada.

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Llamamos:

- **diagonal** o **diagonal principal** de A a los valores que se encuentran en las entradas (i, i) , es decir, los valores a_{ii} .

$$(a_{11}, \dots, a_{nn}) \quad (1.4)$$

- **subdiagonal**
- **superdiagonal**

Definición 1.5: Trazo de una matriz cuadrada.

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Llamamos **trazo** de A , y se denota por $tr(A)$, a la suma de los elementos de la diagonal de A :

$$tr(A) = a_{11} + \cdots + a_{nn} = \sum_{k=1}^n a_{kk} \quad (1.5)$$

Definición 1.6: Traspuesta de una matriz.

Sea $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$. Llamamos **traspuesta** de A , y se denota por $A^t \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$ cuyas entradas (i, j) son las entradas de A en (j, i) :

$$[A^t]_{ij} = [A]_{ji} \quad (1.6)$$

Definición 1.7: Matriz simétrica y antisimétrica.

Decimos que una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es **simétrica** cuando es igual que su traspuesta.

$$A^t = A \quad (1.7)$$

Decimos que una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es **antisimétrica** cuando es la opuesta de su traspuesta.

$$A^t = -A \quad (1.8)$$

Las matrices antisimétricas tienen ceros en su diagonal principal.

Definición 1.8: Traspuesta conjugada de una matriz de $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$.

Sea $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$. Llamamos **traspuesta conjugada** de A , y se denotará por $A^* \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{C})$ cuyas entradas (i, j) son las entradas conjugadas de A en (j, i) :

$$[A^*]_{ij} = [\bar{A}]_{ji} \quad (1.9)$$

Definición 1.9: Matriz hermítica.

Decimos que una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es **hermítica** cuando es igual que su traspuesta.

$$A^* = A \quad (1.10)$$

Las matrices hermítica tienen valores reales en su diagonal principal.

Definición 1.10: Matriz triangular superior e inferior.

Una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se dice que es una **matriz triangular superior** cuando todos los elementos por debajo de su diagonal principal son nulos.

$$\forall j < i \Rightarrow a_{ij} = 0 \quad (1.11)$$

y se dice que es una **matriz triangular inferior** cuando todos los elementos por encima de su diagonal principal son nulos.

$$\forall i < j \Rightarrow a_{ij} = 0 \quad (1.12)$$

Definición 1.11: Matriz diagonal.

Una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se dice que es **diagonal** cuando todos los elementos que no estén en la diagonal principal son nulos.

$$\forall i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0 \quad (1.13)$$

Definición 1.12: Matriz identidad.

Llamamos **matriz identidad** de orden n a la matriz cuadrada $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ con unos en la diagonal y ceros en el resto.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

Definición 1.13: Matriz nula.

Llamamos **matriz nula** de orden $m \times n$ a la matriz que notaremos por $0_{m \times n} \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ con todos sus valores ceros.

$$0_{m \times n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

Cada orden $m \times n$ tiene su matriz nula $0_{m \times n}$.

Definición 1.14: Filas y columnas nulas en una matriz.

Dada una matriz A , decimos que una fila suya es una **fila nula** cuando en dicha fila son todas sus entradas son 0.

Decimos que una columna suya es una **columna nula** cuando todas sus entradas en dicha columna son 0.

Definición 1.15: Submatriz de una matriz. Submatrices fila y columna.

Sea $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ una matriz cualquiera. Una **submatriz** de A es cualquier matriz obtenida a partir de A eliminando cualquier número de filas y/o columnas.

De forma trivial, A es submatriz de si misma.

Llamamos **submatriz fila**, y la denotamos por $F_i(A)$, a cualquiera de las matrices filas formada por las entradas de la fila i -ésima de la matriz A .

$$F_i(A) = (a_{i1} \dots a_{in}) \in \mathcal{M}_{1 \times n}(\mathbb{K}) \quad (1.16)$$

Llamamos **submatriz columna**, y la denotamos por $C_j(A)$, a cualquiera de las matrices columna formada por las entradas de la columna j -ésima de la matriz A .

$$C_j(A) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m \times 1}(\mathbb{K}) \quad (1.17)$$