

1.2. Operaciones con matrices.

1.2.1. Suma de matrices. Producto de matrices por escalares.

Definición 1.16: Suma de matrices.

Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ dos matrices del mismo orden. Definimos la **matriz suma**, y se denota por $A + B$, a la matriz de $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ definida por:

$$[A + B]_{ij} = [A]_{ij} + [B]_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (1.18)$$

o de forma extendida:

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.19)$$

Si no son del mismo orden no se define la suma.

Álgebra

Definición 1.17: Producto por escalares de $\mathbb{K}$ por matrices.

Sea $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ una matriz, y sea $\lambda \in \mathbb{K}$. Definimos la **matriz producto por escalar**, y se denota por λA , a la matriz de $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ definida por:

$$[\lambda A]_{ij} = \lambda[A]_{ij} = \lambda a_{ij} \quad (1.20)$$

o de forma extendida:

$$\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

Álgebra Lineal I

Teorema 1.1: 1.2 Propiedades de la suma y producto por escalares.

Sean $A, B, C \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Entonces se verifica:

1. Asociativa.

$$(A + B) + C = A + (B + C) \quad (1.22)$$

2. Conmutativa.

$$A + B = B + A \quad (1.23)$$

3. Existencia de elemento neutro.

$$A + 0 = 0 + A = A \quad (1.24)$$

4. Existencia de elemento simétrico.

$$A + (-A) = (-A) + A = 0 \quad (1.25)$$

5. Distributiva de la multiplicación respecto de la suma de matrices.

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B \quad (1.26)$$

6. Distributiva de la multiplicación respecto de la suma de escalares.

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A \quad (1.27)$$

7. Asociativa respecto del producto por escalares.

$$\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A \quad (1.28)$$

8. Producto por la unidad del cuerpo.

$$1_{\mathbb{K}}A = A \quad (1.29)$$

Demostración**1.**

$$\begin{aligned} [(A + B) + C]_{ij} &= [A + B]_{ij} + [C]_{ij} = ([A]_{ij} + [B]_{ij}) + [C]_{ij} = \\ &= (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) = \\ &= [A]_{ij} + [B + C]_{ij} = [A + (B + C)]_{ij} \end{aligned}$$

2.

$$[A + B]_{ij} = [A]_{ij} + [B]_{ij} = [B]_{ij} + [A]_{ij} = [B + A]_{ij}$$

3.

$$\begin{aligned} [A + 0_{m \times n}]_{ij} &= [A]_{ij} + [0_{m \times n}]_{ij} = a_{ij} + 0 = a_{ij} = \\ &= 0 + a_{ij} = [0_{m \times n}]_{ij} + [A]_{ij} = [0_{m \times n} + A]_{ij} \end{aligned}$$

4.

$$[A + (-A)]_{ij} = a_{ij} + (-a_{ij}) = 0 = (-a_{ij}) + a_{ij} = [(-A) + A]_{ij}$$

5.

$$\begin{aligned} [\alpha(A + B)]_{ij} &= \alpha[(A + B)]_{ij} = \alpha(a_{ij} + b_{ij}) = \alpha a_{ij} + \alpha b_{ij} = \\ &= [\alpha A]_{ij} + [\alpha B]_{ij} = [\alpha A + \alpha B]_{ij} \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} [(\alpha + \beta)A]_{ij} &= (\alpha + \beta)[A]_{ij} = (\alpha + \beta)a_{ij} = \alpha a_{ij} + \beta a_{ij} = \\ &= \alpha[A]_{ij} + \beta[A]_{ij} = [\alpha A]_{ij} + [\beta A]_{ij} = [\alpha A + \beta A]_{ij} \end{aligned}$$

7.

$$[(\alpha \cdot \beta)A]_{ij} = (\alpha \cdot \beta)[A]_{ij} = (\alpha \cdot \beta)a_{ij} = \alpha \cdot (\beta a_{ij}) = \alpha \cdot [(\beta A)]_{ij} = [\alpha \cdot (\beta A)]_{ij}$$

8.

$$[1_{\mathbb{K}}A]_{ij} = 1_{\mathbb{K}}[A]_{ij} = 1_{\mathbb{K}}a_{ij} = a_{ij} = [A]_{ij}$$

□

Álgebra Lineal I (UNEL)

1.2.2. Producto de matrices.

Definición 1.18: Producto de matrices.

Sean $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ y $B \in \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{K})$ (A tiene tantas columnas como B filas), definimos la matriz producto $AB \in \mathcal{M}_{m \times p}$ definida por:

$$[AB]_{ij} = F_i(A) \cdot C_j(B) = \quad (1.30)$$

$$= (a_{i1}, \dots, a_{in}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = \quad (1.31)$$

$$= \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj} \quad (1.32)$$

Si el número de columnas de A es distinto del número de filas de B , entonces el producto no está definido: no pueden multiplicarse.

Ejemplo 1.1: Cálculo del producto de matrices.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$ y $C = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$

Solución.

Entonces, están definidas AB , AC y BC , pero no están definidas BA , CA ni BC . Por ejemplo, la matriz producto AB , que tendrá dimensiones $(3, 2)$, ya que las dimensiones de A y B son:

$$(3 \times 2) \quad (2 \times 2)$$

Puede calcularse AB como:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 7 + 2 \cdot 9 & 1 \cdot 8 + 2 \cdot 10 \\ 3 \cdot 7 + 4 \cdot 9 & 3 \cdot 8 + 4 \cdot 10 \\ 5 \cdot 7 + 6 \cdot 9 & 5 \cdot 8 + 6 \cdot 10 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 7 + 18 & 8 + 20 \\ 21 + 36 & 24 + 40 \\ 35 + 54 & 40 + 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 28 \\ 57 & 64 \\ 89 & 100 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

Teorema 1.2: 1.4 Propiedades del producto de matrices.

Dadas las matrices $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, $B, C \in \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{K})$, $D \in \mathcal{M}_{p \times q}(\mathbb{K})$, y un escalar $\alpha \in \mathbb{K}$. Entonces se verifican las siguientes propiedades:

1. Asociativa.

$$(AB)D = A(BD) \quad (1.33)$$

2. Existencia de elemento neutro por la derecha.

$$AI_n = A \quad (1.34)$$

3. Existencia del elemento neutro por la izquierda.

$$I_m A = A \quad (1.35)$$

4. Asociatividad respecto del producto por escalares.

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B) \quad (1.36)$$

5. Distributiva respecto de la suma de matrices por la derecha.

$$A(B + C) = AB + AC \quad (1.37)$$

6. Distributiva respecto del producto de matrices por la izquierda.

$$(B + C)D = BD + CD \quad (1.38)$$

Demostración

1. La matriz $AB \in \mathcal{M}_{m \times p}(\mathbb{K})$, mientras que $D \in \mathcal{M}_{p \times q}(\mathbb{K})$; entonces:

$$\begin{aligned} [(AB)D]_{ij} &= \sum_{k=1}^p [AB]_{ik} \cdot [D]_{kj} = \sum_{k=1}^p \left[\left(\sum_{h=1}^n [A]_{ih} [B]_{hk} \right) \cdot [D]_{kj} \right] = \\ &= \sum_{k=1}^p \left[\left(\sum_{h=1}^n a_{ih} b_{hk} \right) \cdot d_{kj} \right] = \sum_{k=1}^p \sum_{h=1}^n a_{ih} b_{hk} d_{kj} = \\ &= \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^p a_{ih} b_{hk} d_{kj} = \sum_{h=1}^n a_{ih} \left(\sum_{k=1}^p b_{hk} d_{kj} \right) = \\ &= \sum_{h=1}^n [A]_{ih} [BD]_{hj} = [A(BD)]_{ij} \end{aligned}$$

2. La matriz $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, mientras que $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; entonces:

$$[AI_n]_{ij} = \sum_{k=1}^n [A]_{ik} [I_n]_{kj} = \sum_{k=1}^n [A]_{ik} \cdot \delta_{kj} = [A]_{ij} = a_{ij}$$

3. La matriz $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, mientras que $I_m \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$; entonces:

$$[I_m A]_{ij} = \sum_{k=1}^m [I_m]_{ik} [A]_{kj} = \sum_{k=1}^m \delta_{ik} [A]_{kj} = [A]_{ij} = a_{ij}$$

4. La matriz $AB \in \mathcal{M}_{m \times p}(\mathbb{K})$, mientras que $I_m \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$; entonces:

$$\begin{aligned} [\alpha(AB)]_{ij} &= \alpha[AB]_{ij} = \alpha \sum_{k=1}^p [A]_{ik} [B]_{kj} = \\ &= \sum_{k=1}^p [\alpha A]_{ik} [B]_{kj} = [(\alpha A)B]_{ij} = \\ &= \sum_{k=1}^p [A]_{ik} [\alpha B]_{kj} = [A(\alpha B)]_{ij} \end{aligned}$$

5. La matriz $AB, AC, (A(B+C)) \in \mathcal{M}_{m \times p}(\mathbb{K})$; entonces:

$$\begin{aligned} [A(B+C)]_{ij} &= \sum_{k=1}^p [A]_{ik} [B+C]_{kj} = \\ &= \sum_{k=1}^p [A]_{ik} ([B]_{kj} + [C]_{kj}) = \\ &= \sum_{k=1}^p [A]_{ik} [B]_{kj} + [A]_{ik} [C]_{kj} = \sum_{k=1}^p [A]_{ik} [B]_{kj} + \sum_{k=1}^p [A]_{ik} [C]_{kj} = \\ &= [AB]_{ij} + [AC]_{ij} = [AB + AC]_{ij} \end{aligned}$$

6. La matriz $BD, CD, (B + C)D \in \mathcal{M}_{n \times q}(\mathbb{K})$; entonces:

$$\begin{aligned} [(B + C)D]_{ij} &= \sum_{k=1}^q [B + C]_{ik} [D]_{kj} = \\ &= \sum_{k=1}^q ([B]_{ik} + [C]_{ik}) [D]_{kj} = \\ &= \sum_{k=1}^q [B]_{ik} [D]_{kj} + [C]_{ik} [D]_{kj} = \sum_{k=1}^q [B]_{ik} [D]_{kj} + \sum_{k=1}^q [C]_{ik} [D]_{kj} = \\ &= [BD]_{ij} + [CD]_{ij} = [BD + CD]_{ij} \end{aligned}$$

□

Ejemplo 1.2: Matriz multiplicada por una matriz columna.

Sea $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ una matriz, y $B \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R})$ una matriz columna. Entonces $AB \in \mathcal{M}_{m \times 1}(\mathbb{R})$ es un vector columna, con tantas filas como A .

$$[AB]_{i,1} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{k,1}$$

por lo que AB será:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k} b_{k,1} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{mk} b_{k,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} + \cdots + a_{1,n}b_{n,1} \\ \vdots \\ a_{m,1}b_{1,1} + a_{m,2}b_{2,1} + \cdots + a_{m,n}b_{n,1} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_{1,1}b_{1,1} \\ \vdots \\ a_{m,1}b_{1,1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{1,2}b_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,2}b_{2,1} \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1,n}b_{n,1} \\ \vdots \\ a_{m,n}b_{n,1} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix} b_{1,1} + \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{pmatrix} b_{2,1} + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix} b_{n,1} = \\ &= C_1(A) \cdot b_{1,1} + C_2(A) \cdot b_{2,1} + \cdots + C_n(A) \cdot b_{n,1} \end{aligned}$$

Una matriz A multiplicada por una matriz columna B da como resultado una combinación lineal de las columnas de A .

Ejemplo 1.3: El producto de matrices no es conmutativo.

Aunque existen conjuntos de matrices cuyo producto cumple la propiedad conmutativa, el producto de matrices no es conmutativo en general.

- Puede ocurrir que uno de los productos AB exista y el otro BA no exista.

Por ejemplo, si $A = (1\ 2\ 3)$ y $B = I_3$, entonces:

$$AB = (1\ 2\ 3)$$

$$BA \text{ no está definido}$$

- Puede que ambos productos existan, pero que no tengan el mismo tamaño.

Por ejemplo, dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, entonces:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

mientras que:

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

- Puede que existan ambos AB y BA , que tengan el mismo tamaño, y aún así no sean iguales.

Por ejemplo, para $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, entonces:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

mientras que:

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.4: $AB = 0 \nRightarrow A = 0 \text{ ó } B = 0$

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}$, resulta que $AB = 0$:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} = \\ &= \left(\begin{array}{cc|cc} 3 \cdot 3 + (-1) \cdot 9 & 3 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-3) \\ (-6) \cdot 3 + 2 \cdot 9 & (-6) \cdot (-1) + 2 \cdot (-3) \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

a pesar de que ni A ni B son la matriz nula.

□

1.2.3. Matrices por bloques. Operaciones.

Definición 1.19: Matrices por bloques.

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, podemos utilizar líneas verticales y horizontales para dividirla en submatrices. En este contexto, a dichas submatrices las llamaremos **bloques**.

Dos de estas divisiones en bloques son, o hacer que cada bloque sea una fila, o hacer que cada bloque sea una columna.

$$\left(\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_m \end{array} \right), \quad (C_1 \mid C_2 \mid \cdots \mid C_n) \quad (1.39)$$

Antes de esta sección hemos visto divisiones al multiplicar matrices, con la intención de visualizar que valores hay que operar para obtener el resultado final. Podremos interpretarlo como una matriz por bloques o no, aunque no cambia el resultado.

Ejemplo 1.5: 1.5 Diferentes bloques para una misma matriz.

Sea la matriz $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (1.40)$$

Esta matriz puede ser dividida en bloques de varias formas; una de ellas es:

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad (1.41)$$

Otra división de A también puede ser de la siguiente forma:

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} \quad (1.42)$$

Definición 1.20: Producto de matrices.

Sean A y B dos matrices por bloques siguientes:

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ \hline A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{array} \right), \quad B = \left(\begin{array}{c|c|c|c} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1q} \\ \hline B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2q} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline B_{n1} & B_{n2} & \cdots & B_{nq} \end{array} \right)$$

y tal que para cada $i = 1, \dots, m$ y para cada $j = 1, \dots, n$ y para cada $k = 1, \dots, q$ el producto $A_{ij}B_{jk}$ tiene sentido, Entonces el producto AB es una matriz formada por $m \cdot q$ bloques, y tal que el bloque de la posición (i, j) se obtiene como:

$$(A_{i1} \ A_{i2} \ \dots, A_{in}) \begin{pmatrix} B_{1j} \\ B_{2j} \\ \vdots \\ B_{nj} \end{pmatrix} = \sum_{h=1}^n A_{ih} B_{hj} \quad (1.43)$$

Ejercicio 1.1

Sean las matrices:

$$A = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \end{array} \right) \quad B = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{array} \right)$$

Hallar AB usando la multiplicación por bloques.

Ejercicio 1.2

Halla las matrices A^2 y A^3 , para los casos:

$$\text{a) } A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

$$\text{b) } A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{array} \right)$$

Definición 1.21: Matrices diagonal por bloques.

Una **matriz diagonal por bloques** tiene la estructura:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_{pp} \end{pmatrix} \quad (1.44)$$

donde cada submatriz de la diagonal $A_{ii} \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{K})$ son matrices cuadradas de dimensión n_i , mientras que el resto de la matriz son ceros.

1.2.4. Potencias de una matriz cuadrada. Binomio de Newton.

Definición 1.22: Potencias de una matriz.

Dada una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, llamamos potencia k -ésima de A al producto de la matriz A por sí misma k veces:

$$A^k = A \cdot \dots \cdot A \quad (1.45)$$

Definimos $A^0 = I_n$.

Ejemplo 1.6: Potencias de matrices diagonales y diagonales por cajas.

Las potencias de matrices diagonales son especialmente sencillas de calcular:

1. Si $A = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$, entonces $A^k = \text{diag}(d_1^k, \dots, d_n^k)$.
2. Si $A = \text{diag}(A_{11}, \dots, A_{nn})$, entonces $A^k = \text{diag}(A_{11}^k, \dots, A_{nn}^k)$.

Definición 1.23: Matrices idempotentes, nilpotentes e involutivas.

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Decimos:

1. A es **idempotente** cuando $A^2 = A$.
2. A es **nilpotente** cuando existe $k > 0$ tal que $A^k = 0$.
3. A es **involutiva** cuando $A^2 = I_n$.

Teorema 1.3: Binomio de Newton.

Sean dos matrices cuadradas de igual tamaño $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tales que conmutan:

$$AB = BA \quad (1.46)$$

y sea un entero no negativo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Entonces:

$$(A + B)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} A^i B^{k-i} \quad (1.47)$$

Demostración

Lo probamos por inducción.

Caso inicial $k = 1$.

$$(A + B)^1 = A + B = \binom{1}{0} A^{1-0} B^0 + \binom{1}{1} A^{1-1} B^1$$

Paso inductivo.

Si para un cierto k se verifica:

$$(A + B)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} A^i B^{k-i}$$

entonces:

$$\begin{aligned} (A + B)^{k+1} &= (A + B) \cdot (A + B)^k = (A + B) \cdot \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} A^i B^{k-i} = \\ &= A \cdot \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} A^i B^{k-i} + B \cdot \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} A^i B^{k-i} = \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} A^{i+1} B^{k-i} + \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} A^i B^{k-i+1} = \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} \binom{k}{i-1} A^i B^{k-i+1} + \left[\binom{k}{0} A^0 B^{k+1} + \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} A^i B^{k-i+1} \right] = \\ &= \binom{k}{0} A^0 B^{k+1} + \sum_{i=1}^k \left[\binom{k}{i-1} A^i B^{k-i+1} + \binom{k}{i} A^i B^{k-i+1} \right] + A^{k+1} = \\ &= B^{k+1} + \sum_{i=1}^k \left[\binom{k}{i-1} + \binom{k}{i} \right] A^i B^{k-i+1} + A^{k+1} = \\ &= \binom{k+1}{0} A^0 B^{k+1} + \sum_{i=1}^k \binom{k+1}{i} A^i B^{k-i+1} + \binom{k+1}{k+1} A^{k+1} B^0 = \\ &= \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} A^i B^{k-i+1} \end{aligned}$$

□

Corolario 1.1: Binomio de Newton con matrices nilpotentes.

Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ matrices que conmutan, y nilpotentes $A^{k_1} = 0$ y $B^{k_2} = 0$ con $k_1, k_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Entonces, si $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se tiene que:

$$(A + B)^k = \sum_{i=\min\{k, k_2\}}^{\min\{k, k_1\}} \binom{k}{i} A^i B^{k-i} \quad (1.48)$$

Demostración.**Ejemplo 1.7: Aplicación del Binomio de Newton para matrices nilpotentes.**

Sea una matriz triangular superior $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ con los mismos valores en la diagonal; por ejemplo:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Esta matriz se puede reescribir como:

$$C = 2 \cdot I_3 + B$$

donde

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Evidentemente, las matrices $2I_3$ y B conmutan entre sí, por lo que las potencias $(2I_3 + B)^k$ pueden obtenerse mediante el binomio de Newton. Las potencias de sus sumandos son:

$$(2I_3)^k = 2^k I_3 \quad k \geq 0$$

mientras que:

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^3 = B^4 = \dots = 0$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
 C^k &= (2I_3 + B)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} B^i (2I_3)^{k-i} = \\
 &= \binom{k}{0} B^0 (2I_3)^{k-0} + \binom{k}{1} B^1 (2I_3)^{k-1} + \binom{k}{2} B^2 (2I_3)^{k-2} = \\
 &= 2^k I_3 + 2^{k-1} k B + 2^{k-2} \frac{k(k-1)}{2} B^2 = \\
 &= 2^k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2^{k-1} k \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 2^{k-2} \frac{k(k-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2^k k & 2^{k-1} k \\ 0 & 0 & 2^k k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2^{k-1} k(k-1) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 2^k & 2^k k & 2^{k-1} k(k-1) + 2^{k-1} k \\ 0 & 2^k & 2^k k \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 2^k & 2^k k & 2^{k-1} k^2 \\ 0 & 2^k & 2^k k \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

□

1.2.5. Traspuesta de matrices.

Teorema 1.4: 1.7 Propiedades de la traspuesta.**1. Traspuesta de una suma de dos matrices.**

Si A y B pueden sumarse (o si son del mismo orden), entonces:

$$(A + B)^t = A^t + B^t \quad (1.49)$$

2. Traspuesta de una suma finita.

Si las matrices $A_1, \dots, A_k$ son matrices que pueden sumarse, entonces:

$$(A_1 + \dots + A_k)^t = A_1^t + \dots + A_k^t \quad (1.50)$$

3. Traspuesta de un producto por escalar.

$$(\alpha A)^t = \alpha A^t \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K}) \quad (1.51)$$

4. Traspuesta de un producto de dos matrices.

Si A y B pueden multiplicarse, entonces:

$$(AB)^t = B^t A^t \quad (1.52)$$

5. Traspuesta de un producto de matrices.

Si las matrices $A_1, \dots, A_k$ son matrices que pueden multiplicarse, entonces:

$$(A_1 \cdot \dots \cdot A_k)^t = A_k^t \cdot \dots \cdot A_1^t \quad (1.53)$$

Demostración

1.

$$[(A + B)^t]_{ij} = [A + B]_{ji} = [A]_{ji} + [B]_{ji} = [A^t]_{ij} + [B^t]_{ij}$$

2.

$$\begin{aligned} [(A_1 + \cdots + A_k)^t]_{ij} &= [A_1 + \cdots + A_k]_{ji} = \\ &= [A_1]_{ji} + \cdots + [A_k]_{ji} = \\ &= [A_1^t]_{ij} + \cdots + [A_k^t]_{ij} = \\ &= [A_1^t + \cdots + A_k^t]_{ij} \end{aligned}$$

3.

$$[(\alpha A)^t]_{ij} = [\alpha A]_{ji} = \alpha [A]_{ji} = \alpha [A^t]_{ij} = [\alpha A^t]_{ij}$$

4.

$$\begin{aligned} [(AB)^t]_{ij} &= [AB]_{ji} = \sum_{h=1}^n [A]_{jh} [B]_{hi} = \sum_{h=1}^n [B]_{hi} [A]_{jh} = \\ &= \sum_{h=1}^n [B^t]_{ih} [A^t]_{hj} = [B^t A^t]_{ij} \end{aligned}$$

5.

$$(A_1 \cdot \dots \cdot A_k)^t = [A_1 \cdot (A_2 \cdot \dots \cdot A_k)]^t = (A_2 \cdot \dots \cdot A_k)^t \cdot A_1^t$$

repetiendo este proceso con el producto entre paréntesis se tiene el resultado.

□

Corolario 1.2: 1.8

Sea A una matriz cuadrada. Entonces:

1. $A + A'$ es simétrica, y $A - A'$ es antisimétrica.
2. A se puede escribir como la suma de una matriz simétrica y una antisimétrica.

$$A = \frac{A + A'}{2} + \frac{A - A'}{2} \quad (1.54)$$

3. AA' es simétrica.

Demostración.

1.

$$(A + A')' = A' + A'' = A' + A = A + A'$$

por lo que $A + A'$ es simétrica, mientras que:

$$(A - A')' = A' - A'' = A' - A = -(A - A')$$

por lo que $A - A'$ es antisimétrica.

2. Las matrices $\frac{A + A'}{2}$ y $\frac{A - A'}{2}$ son simétrica y antisimétrica. Además:

$$\frac{A + A'}{2} + \frac{A - A'}{2} = \frac{A + A' + (A - A')}{2} = \frac{A + A}{2} = \frac{2A}{2} = A$$

3.

$$(AA')' = A''A' = AA'$$

por lo que AA' es simétrica.

□

1.2.6. Traza de matrices.

Teorema 1.5: 1.9 Propiedades de la traza.

Sean $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, y sean $C \in \mathbb{M}_{p \times q}(\mathbb{K})$ y $D \in \mathbb{M}_{q \times p}(\mathbb{K})$

1. Traza de una suma.

$$tr(A + B) = tr(A) + tr(B) \quad (1.55)$$

2. Traza de un producto por escalar.

$$tr(\lambda A) = \lambda tr(A) \quad (1.56)$$

3. Traza de la traspuesta.

$$tr(A) = tr(A') \quad (1.57)$$

4. Traza del producto de matrices.

$$tr(C \cdot D) = tr(D \cdot C) \quad (1.58)$$

aunque no conmuten y aunque C y D no sean matrices cuadradas.

Demostración

1.

$$tr(A + B) = \sum_{i=1}^n [A + B]_{ii} = \sum_{i=1}^n [A]_{ii} + \sum_{i=1}^n [B]_{ii} = tr(A) + tr(B)$$

2.

$$\text{tr}(\lambda A) = \sum_{i=1}^n [\lambda A]_{ii} = \sum_{i=1}^n \lambda [A]_{ii} = \lambda \sum_{i=1}^n [A]_{ii} = \lambda \text{tr}(A)$$

3.

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n [A]_{ii} = \sum_{i=1}^n [A^t]_{ii} = \text{tr}(A^t)$$

4.

$$\begin{aligned} \text{tr}(CD) &= \sum_{i=1}^p [CD]_{ii} = \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^q [C]_{ik} [D]_{ki} = \sum_{k=1}^q \left(\sum_{i=1}^p [D]_{ki} [C]_{ik} \right) = \\ &= \sum_{k=1}^q [DC]_{kk} = \text{tr}(DC) \end{aligned}$$

□

Ejemplo 1.8: No se cumple $\text{tr}(AB) = \text{tr}(A) \cdot \text{tr}(B)$.