

1.3. Método de Gauss. p16-34

Definición 1.24: 1.10 Combinación lineal y coeficientes. Dependencia e independencia lineal.

Sean $F_1, \dots, F_k \in \mathcal{M}_{1 \times n}(\mathbb{K})$ unas matrices fila. Llamamos **combinación lineal** de dichas matrices fila, con **coeficientes** $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$, a la expresión y el resultado de:

$$F = \alpha_1 F_1 + \dots + \alpha_k F_k \quad (1.59)$$

Decimos que las matrices fila $F_1, \dots, F_k \in \mathcal{M}_{1 \times n}(\mathbb{K})$ son **linealmente dependientes** cuando alguna de ellas es el resultado de alguna combinación lineal de las demás. En caso contrario se dicen **linealmente independientes**.

Llamaremos **combinación trivial** de matrices fila es aquella en la que todos sus coeficientes son 0.

Ejemplo 1.9: 1.11

En la matriz $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

las filas son dependientes, dado que se verifica la relación:

$$F_4 = 2F_1 + F_2 - 3F_3$$

Más adelante veremos cómo encontrar estas relaciones entre las filas de una matriz, en caso de que se produzcan. $\square$

Proposición 1.1: 1.12 Caracterización de la dependencia lineal de matrices fila.

Sean $F_1, \dots, F_k \in \mathcal{M}_{1 \times n}(\mathbb{K})$ unas matrices fila. Entonces, son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1. Las filas $F_1, \dots, F_k$ son linealmente dependientes.
2. Existen escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ no todos nulos, tales que:

$$\alpha_1 F_1 + \dots + \alpha_k F_k = \mathbf{0} \quad (1.60)$$

Demostración.

$\Rightarrow$ Supongamos que las filas $F_1, \dots, F_k$ son linealmente dependientes. Entonces existe una fila, que sin pérdida de generalidad podremos suponer que es la última F_k , que es combinación lineal de las demás; es decir, que existen unos escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1} \in \mathbb{K}$ tal que:

$$F_k = \alpha_1 F_1 + \dots + \alpha_{k-1} F_{k-1} \quad (1.61)$$

Entonces, moviendo la fila F_k a la derecha:

$$\mathbf{0} = \alpha_1 F_1 + \dots + \alpha_{k-1} F_{k-1} - F_k \quad (1.62)$$

que es una combinación lineal no trivial, ya que $\alpha_k = -1$, de las matrices fila y que dan como resultado la fila nula.

$\Leftarrow$ Supongamos que existe una combinación lineal no trivial:

$$\alpha_1 F_1 + \dots + \alpha_k F_k = \mathbf{0}$$

digamos que $\alpha_i \neq 0$. Despejando F_i se tiene:

$$F_i = \frac{-\alpha_1}{\alpha_i} F_1 + \dots + \frac{-\alpha_{i-1}}{\alpha_i} F_{i-1} + \frac{-\alpha_{i+1}}{\alpha_i} F_{i+1} + \dots + \frac{-\alpha_k}{\alpha_i} F_k$$

por lo que la fila F_i es combinación lineal de las demás, por lo que las filas $F_1, \dots, F_k$ son linealmente dependientes.

□

Corolario 1.3: 1.12b Caracterización de la independencia lineal de matrices fila.

Sean $F_1, \dots, F_k \in \mathcal{M}_{1 \times n}(\mathbb{K})$ unas matrices fila. Entonces, son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1. Las filas $F_1, \dots, F_k$ son linealmente independientes.
2. Para todo escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ tales que:

$$\alpha_1 F_1 + \dots + \alpha_k F_k = \mathbf{0} \quad (1.63)$$

entonces $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$, es decir, son todos nulos: es una combinación trivial.

Ejercicio 1.3: 1.13

Hallar un conjunto máximo de matrices fila linealmente independientes en las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ejercicio 1.4: 1.14

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, aplicarle las transformaciones elementales por filas $f_1 \leftrightarrow f_3$, $f_3 \rightarrow f_3 + 2f_1$ y $f_2 \rightarrow 3f_2$.

1.3.1. Operaciones elementales por filas. Matrices elementales.

Definición 1.25: 1.15 Matriz elemental.

Llamamos **matriz elemental** de orden n a la matriz resultante de aplicar a la matriz identidad I_n una y solo una operación elemental:

$E_{f_i \leftrightarrow f_j}$ Matriz resultante de aplicar a I_n la operación elemental $f_i \leftrightarrow f_j$, que intercambia las filas f_i y f_j .

$$I_n \xrightarrow{f_i \leftrightarrow f_j} E_{f_i \leftrightarrow f_j} \quad (1.64)$$

$E_{f_i \rightarrow f_i + \beta f_j}$ Matriz resultante de aplicar a I_n la operación elemental $f_i \rightarrow f_i + \beta f_j$.

$$I_n \xrightarrow{f_i \rightarrow f_i + \beta f_j} E_{f_i \rightarrow f_i + \beta f_j} \quad (1.65)$$

$E_{f_i \rightarrow \beta f_i}$ Matriz resultante de aplicar a I_n la operación elemental $f_i \rightarrow \beta f_i$, que multiplica la fila f_i por un escalar β .

$$I_n \xrightarrow{f_i \rightarrow \beta f_i} E_{f_i \rightarrow \beta f_i} \quad (1.66)$$

Ejemplo 1.10: 1.16 Ejemplos de matrices elementales.

$$E_{f_1 \leftrightarrow f_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_{f_3 \rightarrow f_3 + \beta f_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$E_{f_2 \rightarrow \beta f_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ con } \beta \neq 0$$

Ejercicio 1.5: 1.17

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, aplicarle las transformaciones elementales por filas $f_1 \leftrightarrow f_3$, $f_3 \rightarrow f_3 + 2f_1$ y $f_2 \rightarrow 3f_2$, utilizando matrices elementales y el producto en el orden correcto.

1.3.2. Matrices escalonadas y escalonadas reducidas.

Definición 1.26: Pivote de una matriz.

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, llamamos **pivote** de A al primer elemento no nulo de cada fila. Evidentemente, una fila nula en A no tiene pivote.

Definición 1.27: 1.18 Matriz escalonada por filas.

Decimos que una matriz $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ es una **matriz escalonada por filas** cuando cumple las siguientes propiedades:

- a) Todo pivote de la matriz A tiene más ceros a su izquierda que el pivote de la fila anterior.
- b) Si una fila no tiene pivotes, entonces todas las filas siguientes son filas nulas.

Ejercicio 1.6: 1.19

Comprueba si la matriz siguiente es escalonada. En caso de no serlo, obtén de ella su transformada reducida.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.67)$$

Definición 1.28: 1.20 Matrices equivalentes por filas.

Decimos que dos matrices de un mismo tamaño $A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ son **matrices equivalentes por filas**, y se expresa como $A \sim_f B$ cuando, o son iguales, o puede transformarse A en B mediante una sucesión finita de operaciones elementales por filas.

Esto equivale a que existan un número finito de matrices elementales $E_1, \dots, E_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tales que:

$$B = E_k \cdot \dots \cdot E_1 A \quad (1.68)$$

Ejercicio 1.7: 1.21

Comprobar si las siguientes matrices son equivalentes por filas:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 2 & 6 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 12 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Teorema 1.6: 1.22

La relación de equivalencia por filas $\sim_f$ es una relación de equivalencia.

Demostración

Sean unas matrices $A, B, C \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$. Para probar que $\sim_f$ es relación de equivalencia habrá que probar que verifican las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

▪ **Reflexiva.**

Toda matriz A es equivalente por filas con A , ya que basta hacer cero operaciones elementales por filas para convertir una a la otra.

▪ **Simétrica.**

Supongamos que $A \sim_f B$.

▪ **Transitiva.**

Supongamos que $A \sim_f B$ y que $B \sim_f C$.

Ejercicio 1.8: 1.23

Comprobar si las siguientes matrices son equivalentes por filas:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 6 \\ 3 & 6 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Teorema 1.7: 1.24

Toda matriz es equivalente por filas a alguna matriz escalonada.

Demostración

La demostración de este teorema es constructivo, ya que expone un algoritmo que permite obtener una matriz escalonada mediante transformaciones por filas de la matriz original, por lo que dichas matrices serán equivalentes por filas.

El método o algoritmo que vamos a describir se conoce como **método de Gauss** (uno de los infinitos que llevan ese nombre) o **método de escalonamiento de Gauss**. Cabe destacar que solamente requiere de operaciones elementales de **Tipo I** y **Tipo II**.

Sea $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, y vamos a realizarle transformaciones elementales por filas para obtener una escalonada.

1. Buscamos la primera columna en la que aparezca un valor no nulo, y sea $C_j(A)$ dicha columna; esto significa que todas las columnas anteriores $C_1(A), \dots, C_{j-1}(A)$ son todas columnas nulas.

De la columna $C_j(A)$ buscamos el mínimo h tal que $a_{hj} = \lambda \neq 0$. Entonces, aplicaremos la operación de **Tipo I** $f_1 \leftrightarrow f_h$, que intercambia la fila $F_j(A)$ por la $F_1(A)$. La matriz resultante tiene el pivote de la primera fila en su posición $(1, j)$.

2. Para cada índice $i = 2, 3, \dots, m$, que representará a una fila i -ésima, llevaremos a cabo la operación elemental de **Tipo II** $f_i \rightarrow f_i - \frac{a_{ij}}{\lambda} f_1$. Esto consigue hacer ceros a todos los elementos por debajo del pivote. Esta operación podría omitirse en aquellas filas que tengan un 0 debajo del pivote, ya que no las afectaría.
3. Si la matriz resultante ya es escalonada, entonces la matriz obtenida es equivalente por filas a la matriz original A . En caso contrario, procedemos desde el primer paso, ignorando la primera fila.

□

Aunque el proceso descrito cumple en su objetivo de obtener una matriz escalonada que sea equivalente a la matriz original, no podemos llamar, siendo rigurosos, demostración a dicho proceso. Sin embargo, la práctica nos convencerá de su validez como método.

Ejercicio 1.9: 1.25

Hallar una matriz escalonada equivalente por filas a la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 6 \\ 3 & 6 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad (1.69)$$

Ejercicio 1.10: 1.26 No unicidad de una matriz escalonada.

Convertir la matriz siguiente en escalonada, usando dos sucesiones distintas de operaciones elementales por filas:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 8 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad (1.70)$$

Definición 1.29: 1.18 Matriz escalonada reducida por filas.

Decimos que una matriz $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ es una **matriz escalonada reducida por filas** cuando cumple las siguientes propiedades:

- a) A es escalonada por filas.
- b) Los pivotes tienen todos valor 1.
- c) Las entradas de A situadas en la misma columna que un pivote son todas nulas (excepto en la fila del pivote).

Teorema 1.8: 1.27

Toda matriz es equivalente por filas a alguna matriz escalonada reducida.

Demostración

La demostración de este teorema es constructivo, ya que expone un algoritmo que permite obtener una matriz escalonada reducida mediante transformaciones por filas de la matriz original, por lo que dichas matrices serán equivalentes por filas.

El método o algoritmo que vamos a describir se conoce como **método de Gauss-Jordan**. Cabe destacar que solamente requiere de operaciones elementales de **Tipo I, Tipo II y Tipo III**.

Sea $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, y vamos a realizarle transformaciones elementales por filas para obtener una matriz escalonada reducida.

Ejercicio 1.11: 1.28

Hallar una matriz escalonada reducida equivalente por filas a la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 6 \\ 3 & 6 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad (1.71)$$

1.3.3. Forma de Hermite por filas de una matriz.

Lema 1.1: 1.29

Dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ escalonadas reducidas, con $A \sim_f B$, entonces $A = B$.

Teorema 1.9: 1.30

Toda matriz es equivalente por filas a una única matriz escalonada reducida.

Demostración

Sea $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ una matriz, y sean $B, C \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ dos matrices escalonadas reducidas, tales que A sea equivalente por filas tanto a B como a C :

$$A \sim_f B$$

$$A \sim_f C$$

entonces, por la transitividad, se tiene que $B \sim_f C$. Dado que B y C son escalonadas reducidas y equivalentes por filas, entonces, por el **Lema 1.1** se tiene que son necesariamente iguales. $\square$

Definición 1.30: 1.31 Forma de Hermite por filas $H_f(A)$.

Sea $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, llamamos **forma de Hermite por filas**, o también **forma escalonada reducida por filas**, a la única matriz escalonada reducida, que notaremos por $H_f(A)$, que es equivalente por filas a A .

Teorema 1.10: 1.32

Se verifica que:

$$A \sim_f B \quad \Leftrightarrow \quad H_f(A) = H_f(B) \quad (1.72)$$

Demostración

Se propone como ejercicio, prometo que es cortito.

Ejemplo 1.11: 1.33

De un ejemplo anterior se tienen:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 6 \\ 3 & 6 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim_f \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = H_f(A)$$

mientras que:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \sim_f \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = H_f(B)$$

Dado que $H_f(A) \neq H_f(B)$, entonces A y B no son equivalentes por filas. $\square$

Ejemplo 1.12: 1.34

$$\begin{pmatrix} -4 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & -4 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{f_1 \rightarrow f_1 + 2f_3 \\ f_4 \rightarrow f_4 + f_3}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & -4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{f_2 \rightarrow 2f_1 + 3f_2 \\ f_3 \rightarrow -f_1 + 2f_3}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 4 & -8 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_8} & a_1 & a_6 \\ a_3 & \boxed{a_5} & \textcircled{a_7} \\ a_4 & a_9 & \boxed{a_2} \end{pmatrix}$$

1.3.4. Equivalencia por columnas.

Definición 1.31: 1.35 Equivalencia por columnas $\sim_c$.

Decimos que dos matrices de un mismo tamaño $A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ son **matrices equivalentes por columnas**, y se expresa como $A \sim_c B$ cuando, o son iguales, o puede transformarse A en B mediante una sucesión finita de operaciones elementales por columnas.

Esto equivale a que existan $F_1, \dots, F_h \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ un número finito de matrices elementales tales que:

$$B = A \cdot F_1 \cdot \dots \cdot F_h \quad (1.73)$$

Ejercicio 1.12: 1.36

Comprobar que las siguientes matrices son equivalentes por columnas:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 12 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Teorema 1.11: 1.37

La equivalencia por columnas $\sim_c$ es una relación de equivalencia.

Demostración

Es análoga al caso de la equivalencia por filas.

1.3.5. Matrices equivalentes.

Definición 1.32: 1.38 Matrices equivalentes.

Dos matrices A y B se dicen **equivalentes**, y se denota por $A \sim B$, si se puede transformar A en B mediante una sucesión finita de operaciones elementales por filas y/o columnas.

Es decir, cuando existen unas matrices elementales $E_1, \dots, E_k$, que llevan a cabo transformaciones por filas, y otras matrices elementales $F_1, \dots, F_h$, que realizan las transformaciones elementales por columnas, tales que:

$$B = E_k \dots E_1 A F_1 \dots F_h \quad (1.74)$$

Ejemplo 1.13: 1.39

Comprobar si las matrices A y B dadas son equivalentes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 7 & 0 \\ 1 & -6 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Solución.

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 7 & 0 \\ 1 & -6 & -5 \end{pmatrix} \sim_f \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \sim_c \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \sim_c \\ &\sim_c \begin{pmatrix} 7 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix} = B \end{aligned}$$

Teorema 1.12: 1.40

La equivalencia de matrices $\sim$ es una relación de equivalencia.

Demostración

Se deja como ejercicio.