

1.4. El rango de una matriz. p34-42

Definición 1.33: 1.41 Rango de una matriz.

El **rango** de una matriz A , que notaremos por $\mathbf{rg}(A)$, es el mayor número de filas independientes de A .

Proposición 1.2: 1.42 Rango de matrices escalonadas.

El rango de una matriz escalonada es igual a su número de filas no nulas.

Demostración.

Sea $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ escalonada, y queremos obtener su rango. Sean $F_1, \dots, F_t$ las filas no nulas de A . Las filas nulas que pueda tener A no formarán parte de ningún conjunto de filas independientes.

Probaremos, por reducción al absurdo, que su rango es igual al número de filas no nulas. Supongamos que las filas $F_1, \dots, F_t$ son linealmente dependientes. Entonces existirán unos escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_t \in \mathbb{K}$ no todos nulos tales que:

$$\alpha_1 F_1 + \alpha_t F_t = \mathbf{0}$$

Sea k el menor índice tal que $\alpha_k \neq 0$, es decir, todos los anteriores $\alpha_1 = \dots = \alpha_{k-1} = 0$; entonces:

$$\alpha_k F_k + \dots + \alpha_t F_t = \mathbf{0}$$

Dado que el pivote de la fila F_k es $a_{kj} \neq 0$, siendo j la columna de dicho pivote, y por ser A escalonada todos los elementos en la columna $C_j(A)$ bajo dicho pivote son todos nulos. Por tanto, la componente j -ésima en la combinación lineal $\alpha_k F_k + \dots + \alpha_t F_t$, es:

$$[\alpha_k F_k + \dots + \alpha_t F_t]_j = \alpha_k a_{kj} \neq 0$$

por lo que el resultado de $\alpha_1 F_1 + \alpha_t F_t$ no puede ser el vector nulo: hemos llegado a una contradicción.

Por tanto las t filas $F_1, \dots, F_t$ son linealmente independientes, y dado que las otras filas de A son nulas, se tendrá que $\mathbf{rg}(A)$ coincide con el número de filas no nulas. $\square$

Lema 1.2: $\text{rg}(A) = \text{rg}(H_f(A))$

Para toda matriz $A \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ se verifica que:

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(H_f(A)) \quad (1.75)$$

Demostración.

Llamando $k = \text{rg}(A)$, podremos suponer sin pérdida de generalidad que las primeras filas de la matriz A , que notaremos por $F_1, \dots, F_k$, son linealmente independientes, y que las siguientes son combinación lineal de ellas.

Mediante operaciones elementales por filas (¿cuáles?) es posible transformar una matriz A en una matriz C , cuyas primeras k filas sean idénticas a las de A y las restantes nulas.

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

¿Cuántas filas no nulas tiene la matriz $H_f(C)$? Es decir, ¿cuál es su rango?

- Está claro que la matriz $H_f(C)$ no puede tener más filas no nulas que C .
- Si la matriz $H_f(C)$ tuviera menos de k no nulas entonces alguna de las filas $F_1, \dots, F_k$ de C (comunes con las de A) se habría anulado al llevar a cabo alguna operación elemental para obtener la forma de Hermite.

Dicha operación elemental no puede ser de **Tipo I**, ya que solo permuta filas, y no cambia el número de filas nulas y no nulas en la matriz.

Las operaciones de **Tipo II** y **Tipo III** las podremos expresar de una forma única como:

$$F_i \rightarrow \alpha_1 F_1 + \cdots + \alpha_{i-1} F_{i-1} + \beta F_i + \alpha_{i+1} F_{i+1} + \cdots + \alpha_k F_k \quad \beta \neq 0$$

Si la fila F_i se convierte en nula tras esta transformación entonces:

$$0 = \alpha_1 F_1 + \cdots + \alpha_{i-1} F_{i-1} + \beta F_i + \alpha_{i+1} F_{i+1} + \cdots + \alpha_k F_k \quad \beta \neq 0$$

donde despejando F_i :

$$F_i = \frac{-1}{\beta} [\alpha_1 F_1 + \cdots + \alpha_{i-1} F_{i-1} + \alpha_{i+1} F_{i+1} + \cdots + \alpha_k F_k]$$

por lo que F_i sería una combinación lineal de las otras filas, lo que supone una contradicción.

Por tanto, el número de filas no nulas de $H_f(C)$ es k , por lo que:

$$\mathbf{rg}(H_f(C)) = k$$

que coincide con el $\mathbf{rg}(A)$ como queríamos demostrar.

□

Teorema 1.13: 1.43 Rango de matrices equivalentes.

Si dos matrices son equivalentes por filas, entonces tienen el mismo rango.

Demostración

Sean A, B dos matrices equivalentes por filas. Entonces sus formas de Hermite por filas son las mismas:

$$H_f(A) = H_f(B) \quad (1.76)$$

Por la **Proposición** 1.2, el rango de ambas formas de Hermite por filas es igual al número de sus filas no nulas. Por tanto, por el **Lema** 1.2:

$$\mathbf{rg}(A) = H_f(A) = H_f(B) = \mathbf{rg}(B)$$

□

Corolario 1.4: 1.44

El rango de una matriz A es igual al número de filas no nulas de cualquiera de sus matrices escalonadas que sea equivalente por filas a A .

Demostración.

Dado que las transformaciones elementales por filas no modifican el rango de la matriz, entonces, dada A una matriz y B una matriz escalonada equivalente por filas $A \sim_f B$, y $H_f(A) = H_f(B)$ su matriz escalonada reducida por filas, entonces:

$$\mathbf{rg}(A) = \mathbf{rg}(H_f(A)) = \mathbf{rg}(H_f(B)) = \mathbf{rg}(B)$$

lo que prueba el resultado.

□

Ejemplo 1.14: No se cumple el recíproco.

Dos matrices pueden tener el mismo rango, y sin embargo no ser equivalentes por filas. En el **Ejemplo 1.11** las dos matrices tienen rango 3, y sin embargo no son equivalentes por filas.

Teorema 1.14: 1.46

Sea una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Entonces A tiene rango n si y solo si A es producto de matrices elementales.

Demostración

$\Rightarrow$ Sea una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $\mathbf{rg}(A) = n$. Entonces $\mathbf{rg}(H_f(A)) = n$. Sin embargo la única matriz escalonada reducida de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ con n pivotes (filas no nulas) es la matriz identidad. Por tanto:

$$A \sim_f H_f(A) = I_n$$

Por tanto, por la simetría de la relación, $I_n \sim_f A$, por lo que existen unas matrices elementales $E_1, \dots, E_k$ tales que:

$$A = E_k, \dots, E_1 \cdot I_n = E_k, \dots, E_1$$

$\Leftarrow$ Supongamos que A sea producto de unas matrices elementales $E_1, \dots, E_k$:

$$A = E_k \cdot \dots \cdot E_1 \tag{1.77}$$

entonces:

$$A = E_k \cdot \dots \cdot E_1 \cdot I_n \tag{1.78}$$

por lo que $A \sim_f I_n$. Dado que I_n es escalonada reducida entonces $H_f(A) \sim_f I_n$. Por tanto, por el **Corolario 1.4** se tiene

$$\mathbf{rg}(A) = \mathbf{rg}(H_f(A)) = \mathbf{rg}(I_n) = n$$

□

Ejemplo 1.15: 1.45

Calcular el rango de la matriz A en función de los parámetros $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & \alpha \\ 4 & 8 & 12 & \beta \\ 6 & 7 & 13 & \gamma \end{pmatrix}$$

Solución.

Escalonando la matriz A :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & \alpha \\ 4 & 8 & 12 & \beta \\ 6 & 7 & 13 & \gamma \end{pmatrix} \sim_f \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & \alpha \\ 0 & 2 & 2 & \beta - 2\alpha \\ 0 & -2 & -2 & \gamma - 3\alpha \end{pmatrix} \sim_f \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & \alpha \\ 0 & 2 & 2 & \beta - 2\alpha \\ 0 & 0 & 0 & \gamma - 5\alpha + \beta \end{pmatrix} = A'$$

Sean cuales sean los valores de los parámetros se verificará $\mathbf{rg}(A) = \mathbf{rg}(A')$. Dado que A' es escalonada, $\mathbf{rg}(A')$ es el número de filas no nulas. Por tanto:

$$\mathbf{rg}(A) = \mathbf{rg}(A') = \begin{cases} 2 & \text{si } \gamma - 5\alpha + \beta = 0 \\ 3 & \text{si } \gamma - 5\alpha + \beta \neq 0 \end{cases}$$

□

Lema 1.3: 1.47

Sean unas matrices $H_r, H_s \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dadas por:

$$H_r = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right), \quad H_s = \left(\begin{array}{c|c} I_s & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \quad (1.79)$$

Entonces:

$$H_r \sim H_s \Leftrightarrow r = s \quad (1.80)$$

Demostración.

$\Rightarrow$ Sean $H_r, H_s \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tales que $H_r \sim H_s$. Veremos, por reducción al absurdo, que $r = s$.

Sean $r < s$ (si son distintos, entonces uno tiene que ser el menor). Dado que por hipótesis $H_r \sim H_s$ entonces existen unas matrices elementales $E_1, \dots, E_k$ que representan las operaciones elementales por filas, y $F_1, \dots, F_h$, que representan las operaciones elementales por columnas, y tales que verifican:

$$H_s = E_k \cdot \dots \cdot E_1 \cdot H_r \cdot F_1 \cdot \dots \cdot F_h \quad (1.81)$$

Entonces $H_s \sim_f H_r \cdot F_1 \cdot \dots \cdot F_h$, ya que al aplicarle las transformaciones elementales por filas asociadas a las matrices E_i se convierte en H_s . Por el **Teorema 1.13** se tiene:

$$\mathbf{rg}(H_s) = \mathbf{rg}(H_r \cdot F_1 \cdot \dots \cdot F_h) \quad (1.82)$$

Por otro lado se verifica la siguiente cadena de desigualdades:

$$s = \mathbf{rg}(H_s) = \mathbf{rg}(H_r \cdot F_1 \cdot \dots \cdot F_h) = \mathbf{rg}(H_r) = r$$

por lo que $s \leq r$, por lo que tenemos una contradicción.

Por tanto, no queda más remedio que ocurrir que $r = s$.

$\Leftarrow$ Si $r = s$, entonces $H_r = H_s$, por lo que son equivalentes $H_r \sim H_s$.

□

Lema 1.4: 1.48

Sean unas matrices $A, H_r \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ dadas por:

$$H_r = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \quad (1.83)$$

Entonces:

$$A \sim H_r \Leftrightarrow \mathbf{rg}(A) = r \quad (1.84)$$

Demostración.

⇐ Supongamos que $r = \mathbf{rg}(A)$, y sea $H_f(A) = (h_{ij})$ a la forma escalonada reducida de A . Entonces, dado que $A \sim_f H_f(A)$, por construcción, entonces $H_f(A)$ tiene exactamente r filas no nulas. Llamamndo $(1, j_1), \dots, (r, j_r)$ a las posiciones de los pivotes de $H_f(A)$; esto significa que para cada $k = 1, \dots, r$, la columna C_{j_k} de la matriz $H_f(A)$ tiene como única entrada no nula al elemento $h_{kj_k} = 1$.

También podremos hacer ceros a la derecha de los pivotes mediante operaciones por columnas, es decir, para cada pivote en (k, j_k) , entonces para cada columna c_l con $l > j_k$ se aplica la operación $c_l \rightarrow c_l - h_{kl}c_{j_k}$. Obtenemos así una matriz C cuyos únicos elementos no nulos son los r pivotes originales en las mismas posiciones $(1, j_1), \dots, (r, j_r)$.

Ahora, podemos hacer operaciones por columnas para obtener una matriz $H_f(A)$ (¿se puede obtener la misma matriz mediante transformaciones por filas?).

Por tanto:

$$A \sim_f H_f(A) \sim_c C \sim_c H_r$$

por lo que $A \sim H_r$.

⇒ Supongamos que $A \sim H_r$. Llamamos $s = \mathbf{rg}(A)$. Por la implicación anterior se tiene que $A \sim H_s$. Por tanto:

$$H_s \sim A \sim H_r$$

Por el **Lema 1.3**, entonces $r = s$, por lo que $\mathbf{rg}(A) = s = r$. □

Teorema 1.15: 1.49 Caracterización de la relación $\sim$

Dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$. Entonces, son equivalentes:

1. $A \sim B$.
2. $\text{rg}(A) = \text{rg}(B)$.

Demostración

Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ dos matrices equivalentes. Sean sus rangos:

$$r = \text{rg}(A)$$

$$s = \text{rg}(B)$$

Por el **Lema 1.4** serán equivalentes a una matriz tipo H_r y H_s , y con rango:

$$A \sim H_r = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \text{rg}(A) = \text{rg}(H_r)$$

$$B \sim H_s = \left(\begin{array}{c|c} I_s & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \text{rg}(B) = \text{rg}(H_s)$$

Entonces:

$$r = s \Leftrightarrow H_r \sim H_s \Leftrightarrow A \sim B \Leftrightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(B)$$

□

Definición 1.34: 1.50 Forma de Hermite.

Llamamos **forma de Hermite** de una matriz A , con $r = \text{rg}(A)$, a la matriz $H(A)$, dada por:

$$H_r = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \quad (1.85)$$

Teorema 1.16: 1.51 Propiedades de la relación $\sim$ y el rango.

Sean dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}$. Se verifican las siguientes afirmaciones:

1. Traspuesta.

$$A \sim B \Leftrightarrow A^t \sim B^t \quad (1.86)$$

2. Cuadradas.

$$m = n \Rightarrow A \sim A^t \quad (1.87)$$

3. Rango.

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A^t) \quad (1.88)$$

4. Cota del rango.

$$\text{rg}(A) \leq \min\{m, n\} \quad (1.89)$$

Demostración

1. Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}$, con $A \sim B$; entonces:

$$B = E_k \cdot \dots \cdot E_1 \cdot A \cdot F_1 \cdot \dots \cdot F_h \quad (1.90)$$

donde E_i y F_j son matrices elementales. Entonces:

$$\begin{aligned} B^t &= (E_k \cdot \dots \cdot E_1 \cdot A \cdot F_1 \cdot \dots \cdot F_h)^t = \\ &= F_h^t \cdot \dots \cdot F_1^t \cdot A^t \cdot E_1^t \cdot \dots \cdot E_k^t \end{aligned}$$

Dado que las traspuestas de matrices elementales son también matrices elementales, entonces la identidad anterior nos dice que $A^t \sim B^t$.

El recíproco se verifica aplicando el mismo resultado a A^t y B^t , y sabiendo que $(A^t)^t = A$.

2. Si $m = n$, entonces la matriz $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ es cuadrada de orden n (o de orden m , ya que es el mismo valor).

Llamando $r = \mathbf{rg}(A)$, entonces por el **Lema** 1.4 se verifica que $A \sim H_r$. Además, aplicando el primer apartado se tiene que $A^t \sim H_r^t$. Dado que H_r es una matriz diagonal entonces:

$$A^t \sim H_r^t = H_r \sim A$$

por lo que $A \sim A^t$.

3. Si $n = m$, entonces, como se ha probado en el apartado anterior, se tiene que $A \sim A^t$. Entonces, por el **Teorema** 1.15 se tiene que $\mathbf{rg}(A) = \mathbf{rg}(A^t)$.

Cuando son distintos, $m \neq n$, supondremos sin pérdida de generalidad que $m < n$.

4. Dado que el rango de una matriz es por definición menor o igual al número de filas que tiene, entonces:

$$\mathbf{rg}(A) \leq m$$

$$\mathbf{rg}(A^t) \leq n$$

Dado que $\mathbf{rg}(A) = \mathbf{rg}(A^t)$, entonces $\mathbf{rg}(A)$ es menor a ambos m y n ; por tanto es menor o igual a su mínimo.

□

Ejercicio 1.13: 1.52

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Teorema 1.17: 1.53 Propiedades del rango.

Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, $D \in \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{K})$, y $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, con $\mathbf{rg}(C) = n$. Entonces:

1. .

$$|\mathbf{rg}(A) - \mathbf{rg}(B)| \leq \mathbf{rg}(A + B) \leq \mathbf{rg}(A) + \mathbf{rg}(B) \quad (1.91)$$

2. .

$$\forall \alpha \in \mathbb{K} - \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{rg}(A) = \mathbf{rg}(\alpha A) \quad (1.92)$$

3. .

$$\mathbf{rg}(AD) \leq \min\{\mathbf{rg}(A), \mathbf{rg}(D)\} \quad (1.93)$$

4.

$$\mathbf{rg}(AC) = \mathbf{rg}(A) \quad (1.94)$$

5.

$$\mathbf{rg}(CD) = \mathbf{rg}(D) \quad (1.95)$$

Demostración

1. Construimos la matriz apilando la matriz $A + B$ sobre la matriz B :

$$\begin{pmatrix} A + B \\ B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2m \times n}(\mathbb{K})$$

mediante las transformaciones elementales siguientes:

$$f_i \rightarrow f_i - f_{i+m} \quad i = 1, \dots, m$$

puede convertirse en:

$$\left(\frac{A+B}{B} \right) \sim_f \left(\frac{A}{B} \right)$$

y tienen el mismo rango.

Entonces:

$$\mathbf{rg}(A+B) \leq \mathbf{rg}\left(\frac{A+B}{B}\right) = \left(\frac{A}{B}\right) \leq \mathbf{rg}(A) + \mathbf{rg}(B)$$

por lo que:

$$\mathbf{rg}(A+B) \leq \mathbf{rg}(A) + \mathbf{rg}(B) \quad (1.96)$$

es decir, el rango de una suma de matrices es menor o igual a la suma de sus rangos.

Por otro lado, dado que $A = (A+B) + (-B)$ y aplicando la identidad anterior:

$$\mathbf{rg}(A) = \mathbf{rg}[(A+B) + (-B)] \leq \mathbf{rg}(A+B) + \mathbf{rg}(-B) = \mathbf{rg}(A+B) + \mathbf{rg}(B)$$

de donde:

$$\mathbf{rg}(A) - \mathbf{rg}(B) \leq \mathbf{rg}(A+B) \quad (1.97)$$

Igualmente, intercambiando A por B y viceversa en la identidad anterior:

$$\mathbf{rg}(B) - \mathbf{rg}(A) \leq \mathbf{rg}(A+B) \quad (1.98)$$

de donde:

$$|\mathbf{rg}(A) - \mathbf{rg}(B)| \leq \mathbf{rg}(A+B) \quad (1.99)$$

2. Se verifica que $A \sim_f \alpha A$, ya que puede convertirse A en αA mediante las transformaciones por filas:

$$f_i \rightarrow \alpha f_i \quad i = 1, \dots, m$$

Entonces por el **Teorema** 1.15 sus rangos coinciden.

3. Llamando a las matrices de Hermite por filas de A y por columnas de D :

$$H = H_f(A) \quad (1.100)$$

$$G = H_c(D) \quad (1.101)$$

Entonces existen unas matrices elementales E_i, F_j tales que:

$$H_f(A) = E_k \cdot \dots \cdot E_1 \cdot A \quad (1.102)$$

$$H_c(D) = D \cdot F_1 \cdot \dots \cdot F_h \quad (1.103)$$

Entonces podemos expresar la matriz HG como:

$$\begin{aligned} HG &= H_f(A) \cdot H_c(D) = \\ &= E_k \cdot \dots \cdot E_1 \cdot A \cdot D \cdot F_1 \cdot \dots \cdot F_h \end{aligned}$$

de donde se deduce que $AD \sim HG$.

Observa que también hemos demostrado, en particular, que se verifica:

$$A \sim H, \quad D \sim G \quad \Rightarrow \quad AD \sim HG \quad (1.104)$$

Llamando $r = \mathbf{rg}(A)$, entonces su matriz reducida $H = H_f(A)$ tiene exactamente r filas no nulas. Por tanto, la matriz HG tiene a lo sumo sus r primeras filas no nulas, mientras que las siguientes son necesariamente nulas.

Análogamente, llamando $s = \mathbf{rg}(D)$, entonces su matriz reducida $G = H_c(D)$ tiene exactamente s columnas no nulas. Por tanto, la matriz HG tiene a lo sumo sus s primeras columnas no nulas, mientras que las siguientes son necesariamente nulas.

De los dos anteriores, se tiene que:

$$\mathbf{rg}(AB) = \mathbf{rg}(HG) \leq \min\{r, s\} \quad (1.105)$$

4. Por el **Teorema** 1.14, dado que C es una matriz de orden n verificando $\mathbf{rg}(C) = n$, entonces C es producto de matrices elementales $E_1, \dots, E_k$:

$$C = E_1 \cdot \dots \cdot E_k \quad (1.106)$$

Luego AC es:

$$AC = A \cdot E_1 \cdot \dots \cdot E_k \sim_c A \quad (1.107)$$

por lo que en particular $AC \sim A$.

Por el **Teorema** 1.15 se deduce que ambas matrices tienen el mismo rango:

$$\mathbf{rg}(AC) = \mathbf{rg}(A) \quad (1.108)$$

5. La demostración es análoga a la anterior.

□