

1.5. La inversa de una matriz. p42-53

Definición 1.35: 1.54 Matrices invertibles o regulares, y singulares. Matriz inversa.

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; decimos que A es **invertible** o **regular** cuando existe otra matriz, que notaremos por $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, que llamaremos **matriz inversa** de A , y que verifica que:

$$AA^{-1} = I_n = A^{-1}A \quad (1.109)$$

En caso contrario diremos que la matriz A es **singular** o **no invertible**.

Lema 1.5: 1.54b Invertibilidad de A^{-1} .

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es invertible, con inversa A^{-1} , entonces A^{-1} es invertible, y cuya matriz inversa es la misma A .

$$(A^{-1})^{-1} = A \quad (1.110)$$

Demostración.**Ejercicio 1.14: 1.55**

Halla si existe inversa de la matriz A , y hallarla en caso afirmativo.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Teorema 1.18: 1.56 Unicidad de la inversa de una matriz.

Si una matriz cuadrada es invertible, entonces solamente existe una matriz inversa suya.

Demostración

Proposición 1.3: 1.57 Inversas de las matrices elementales.

Las inversas de los tres tipos de matrices elementales son:

$$E_{f_i \leftrightarrow f_j}^{-1} = E_{f_i \leftrightarrow f_j} \quad (1.111)$$

$$E_{f_i \rightarrow f_i + \beta f_j}^{-1} = E_{f_i \rightarrow f_i - \beta f_j} \quad (1.112)$$

$$E_{f_i \rightarrow \beta f_i}^{-1} = E_{f_i \rightarrow \frac{1}{\beta} f_i} \quad \forall \beta \neq 0 \quad (1.113)$$

Demostración.

Teorema 1.19: 1.58 Propiedades de la inversión de matrices.

Sean $A, B, A_1, \dots, A_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Entonces:

1. A es invertible si y solo si A^t es invertible.

Además:

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t \quad (1.114)$$

2. Si A y B son invertibles, entonces AB es invertible, con inversa dada por:

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} \quad (1.115)$$

3. Si $A_1, \dots, A_k$ son invertibles, entonces $A_1 \dots A_k$ es invertible, con inversa dada por:

$$(A_1 \dots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \dots A_1^{-1} \quad (1.116)$$

Demostración**Ejercicio 1.15: 1.59**

Si $A = E_1 E_2 E_3 E_4$, hallar su inversa.

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

Teorema 1.20: 1.60 Caracterización de las matrices invertibles (I).

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Entonces, son equivalentes:

1. La matriz A tiene inversa, es decir, es una matriz regular.
2. Se verifica la propiedad de cancelación:

$$BA = CA \Rightarrow B = C \quad (1.117)$$

3. Se verifica la propiedad de cancelación:

$$BA = 0 \Rightarrow B = 0 \quad (1.118)$$

4. A es de rango máximo n :

$$\text{rg}(A) = n \quad (1.119)$$

Demostración**Ejercicio 1.16: 1.61**

Teorema 1.21: 1.62 Caracterización de las matrices invertibles (II).

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Entonces, son equivalentes:

- 1'. La matriz A tiene inversa, es decir, es una matriz regular.
- 2'. Se verifica la propiedad de cancelación:

$$AB = AC \Rightarrow B = C \quad (1.120)$$

- 3'. Se verifica la propiedad de cancelación:

$$AB = 0 \Rightarrow B = 0 \quad (1.121)$$

Demostración**Corolario 1.5: 1.63 Condición suficiente de la matriz inversa.**

Sean $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Se verifican las siguientes afirmaciones:

1.

$$AB = I_n \Rightarrow B = A^{-1} \quad (1.122)$$

2.

$$CA = I_n \Rightarrow C = A^{-1} \quad (1.123)$$

Demostración.

Ejercicio 1.17: 1.64 Cálculo de $H_f(Q)$ y P .

Dada la matriz A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Hallar $H_f(A)$ y una matriz invertible P tal que $PA = H_f(A)$.
- Hallar $H_c(A)$ y una matriz invertible Q tal que $AQ = H_c(A)$.

Proposición 1.4: 1.65 Caracterización de las matrices equivalentes por filas y/o por columnas.

Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$. Entonces se verifican las siguientes afirmaciones:

1.

$$A \sim_f B \Leftrightarrow \exists P \in \mathcal{M}_{m \times m}(\mathbb{K}) \mid PA = B \quad (1.124)$$

2.

$$A \sim_c B \Leftrightarrow \exists Q \in \mathcal{M}_{m \times m}(\mathbb{K}) \mid AQ = B \quad (1.125)$$

3.

$$A \sim B \Leftrightarrow \exists P \in \mathcal{M}_{m \times m}(\mathbb{K}), Q \in \mathcal{M}_{m \times m}(\mathbb{K}) \mid PAQ = B \quad (1.126)$$

Demostración.

Ejercicio 1.18: 1.66

Comprobar si son equivalentes las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 3 \\ -2 & 12 & -5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.19: 1.67

Hallar la inversa de:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & -4 & -7 \end{pmatrix}$$

Álgebra Lineal I

1.5.1. Inversas laterales.

Definición 1.36: 1.68 Inversas a la izquierda y a la derecha.

Sea $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$. Llamamos:

- **inversa por la izquierda** de A a una matriz $X \in \mathcal{M}_{n \times m}$ tal que $XA = I_n$.
- **derecha por la izquierda** de A a una matriz $Y \in \mathcal{M}_{n \times m}$ tal que $AY = I_m$.

Proposición 1.5: 1.69 Propiedades de las inversas laterales.

Una $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$. Entonces se verifica que:

1. A tiene inversa a la izquierda si y solo si $\mathbf{rg}(A) = n$.
2. A tiene inversa a la derecha si y solo si $\mathbf{rg}(A) = m$.
3. Si $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ es una matriz cuadrada, con $\mathbf{rg}(A) = n$, entonces las coinciden las tres matrices:
 - la inversa de A ,
 - la inversa por la izquierda,
 - la inversa por la derecha

Demostración.**Ejercicio 1.20: 1.70 Cálculo de una inversa lateral.**

Hallar una matriz inversa por la izquierda de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$