

1.6. El determinante de una matriz. p53-71

Definición 1.37: 1.71 Determinante.

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ una matriz cuadrada. Definimos el **determinante** de A , y se denotará por $\det(A)$ o $|A|$, al valor definido por recursión:

- Si $n = 1$, entonces la matriz $A = (a_{11})$, se define:

$$\det(A) = a_{11} \quad (1.127)$$

Recuerda que el signo $|\cdot|$ es signo del determinante, no del valor absoluto.

- Si $n > 1$, entonces:

$$\det(A) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \cdot a_{k1} \cdot \det(A_{k1}) \quad (1.128)$$

donde se denota A_{ij} a la submatriz de A de un orden menor que A , y que se obtiene eliminando de A la fila i -ésima y la columna j -ésima.

Ejemplo 1.16: 1.72

- Orden 2.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = 2 - 12 = -10$$

- Orden 3.

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 0 + 24 + 0 - [0 + 0 - 12] = 36$$

- Orden 4.

Usando la primera columna:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} &= 2 \cdot (-1)^{1+1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= 2 \cdot (-10) + 13 = -7 \end{aligned}$$

□

Proposición 1.6: 1.73 Determinantes de matrices triangulares (superiores).

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz con $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ que sea triangular superior. Entonces el determinante de A es el producto de todos los elementos de la diagonal principal:

$$\det(A) = a_{11} \cdot \dots \cdot a_{nn} \quad (1.129)$$

Demostración.

Los probamos por inducción:

- **Caso base.** Tanto para orden 1 como para orden 2 son evidentes. En efecto, calculando estos determinantes:

$$\begin{aligned} |a_{11}| &= a_{11} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22} - a_{12} \cdot 0 = a_{11}a_{22} \end{aligned}$$

- **Paso inductivo.** Si es verdadero para orden $n - 1$, entonces podemos calcular el determinante de una matriz de orden n :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

desarrollando su determinante mediante la primera columna; el cálculo queda como sigue:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

donde, por hipótesis de inducción, el segundo determinante es el de una matriz triangular de orden $n - 1$, por lo que su determinante coincide con el producto de los elementos de su diagonal. Por tanto:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$$

□

Ejemplo 1.17: 1.74 Determinante de una matriz triangular usando la definición.

Vamos a calcular el determinante de una matriz triangular superior, usando en cada paso la primera columna.

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 = 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 = 60$$

Proposición 1.7: 1.75

Si a una matriz de orden n se le intercambian dos filas, su determinante cambia de signo.

Demostración.

Corolario 1.6: 1.76

Si una matriz tiene dos filas iguales, entonces su determinante es cero.

Demostración.

Proposición 1.8: 1.77

Si a una fila de una matriz se la multiplica por un escalar cualquiera, la matriz obtenida tiene como determinante el determinante de A multiplicado por dicho escalar.

Demostración.

Corolario 1.7: 1.78

Si una matriz tiene una fila nula, entonces su determinante es cero.

Demostración.

Proposición 1.9: 1.79Demostración.**Proposición 1.10: 1.80**

Si a una fila de una matriz se le suma un múltiplo de otra fila, el determinante de la nueva matriz es el mismo.

Demostración.**Corolario 1.8: 1.81 Determinante de las matrices elementales.**

Los determinantes de los tres tipos de matrices elementales son:

1. Tipo I.

$$\det(E_{f_i \leftrightarrow f_j}) = -1 \quad (1.130)$$

2. Tipo II.

$$\det(E_{f_i \rightarrow f_i + \beta f_j}) = 1 \quad (1.131)$$

3. Tipo III.

$$\det(E_{f_i \leftrightarrow \beta f_i}) = \beta \quad (1.132)$$

Demostración.

Teorema 1.22: 1.82

Si $A, E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, siendo E una matriz elemental, entonces:

$$\det(E \cdot A) = \det(E) \cdot \det(A) \quad (1.133)$$

Demostración**Ejercicio 1.21: 1.83a**

Calcular el determinante siguiente:

$$\begin{vmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 8 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

Ejercicio 1.22: 1.83b

Calcular el determinante siguiente:

$$\begin{vmatrix} -4 & 8 & 0 & 4 \\ 2 & -4 & 3 & 5 \\ -2 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 7 & 3 \end{vmatrix}$$

Teorema 1.23: 1.84

Dadas $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, entonces se verifican:

1. Determinante e invertibilidad.

La matriz A es invertible si y solo si $\det(A) \neq 0$.

2. Determinante y el producto de matrices.

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) \quad (1.134)$$

En particular:

$$\det(AB) = \det(BA) \quad (1.135)$$

3. Determinante y trasposición.

$$\det(A) = \det(A^t) \quad (1.136)$$

Demostración**Proposición 1.11: 1.85 Fórmula de Laplace (por la primera fila).**

El determinante de una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, entonces su determinante puede calcularse como:

$$\det(A) = \sum_{k=1}^n a_{1k} \alpha_{1k} = a_{11} \alpha_{11} + \cdots + a_{1n} \alpha_{1n} \quad (1.137)$$

Demostración.

Teorema 1.24: 1.86 Fórmula de Laplace por una fila o por una columna arbitraria.

El determinante de una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, entonces su determinante puede calcularse como:

- por la fila i -ésima:

$$\det(A) = \sum_{k=1}^n a_{ik} \alpha_{ik} \quad (1.138)$$

- por la columna j -ésima:

$$\det(A) = \sum_{k=1}^n a_{kj} \alpha_{kj} \quad (1.139)$$

Demostración**Ejercicio 1.23: 1.87**

Calcular el determinante siguiente:

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

Ejercicio 1.24: 1.88 Una ecuación.

Hallar el valor que debe tomar el parámetro x que anule el determinante de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & 3 & 2 \\ 2 & 3 & x & 1 \\ 3 & 2 & 1 & x \end{pmatrix}$$

Proposición 1.12: 1.89 Determinante de una matriz por bloques.

Sean unas matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$, y $C \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$. Entonces:

$$\det \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array} \right) = \det(A) \cdot \det(B) \quad (1.140)$$

Demostración.

Corolario 1.9: 1.90 Determinante de matrices triangulares por bloques.

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ una matriz triangular (superior o inferior) por bloques, y sean k matrices cuadradas $A_{ii} \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{K})$ las submatrices situadas en la diagonal de A . Entonces:

$$\det(A) = \det(A_{11}) \cdot \det(A_{22}) \cdot \dots \cdot \det(A_{kk}) \quad (1.141)$$

Demostración.

Ejercicio 1.25: 1.91

Halla el determinante de la siguiente matriz triangular superior por bloques:

$$\left(\begin{array}{cc|cc|cc} 3 & 5 & 1 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 7 & 6 & 4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 1 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right)$$

Ejercicio 1.26: 1.92a

Calcula la matriz inversa de:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.27: 1.92b

Calcula la matriz inversa de:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.28: 1.92c

Calcula la matriz inversa de:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Definición 1.38: 1.93 Menores de una matriz.

Sea $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$; llamamos **menor de orden k** al determinante de cualquier submatriz cuadrada de orden k de A .

Definición 1.39: 1.93b Menores principales de una matriz.

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; llamamos **menor principal de orden $k = 1, \dots, n$** , y lo denotaremos por $\Delta_k(A)$, al determinante:

$$\Delta_k(A) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} \quad (1.142)$$

Ejercicio 1.29: 1.94

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -2 & -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Proposición 1.13: 1.95

Sea una matriz $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, y sea $A_p \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, y sea $p = \mathbf{rg}(A_p) < \mathbf{rg}(A)$. Entonces existe una $A_{p+1} \in \mathcal{M}_{p+1}(\mathbb{K})$ submatriz de A , con $\mathbf{rg}(A_{p+1}) = p + 1$, y que contiene a la matriz A_p .

Demostración.

Supondremos, sin pérdida de generalidad, que la matriz A_p es la submatriz de orden p formada por las p primeras filas y columnas.

$$A_p = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pp} \end{pmatrix}$$

Dado que $\mathbf{rg}(A_p) = p$, que coincide con su orden, entonces todas sus filas son independientes. En consecuencia, las p primeras filas $F_1, \dots, F_p$ de A son linealmente independientes. Análogamente, las p primeras columnas $C_1, \dots, C_p$ son también linealmente independientes.

Dado que $\mathbf{rg}(A) > p$ entonces debe haber al menos alguna otra fila F_s , con $s > p$, de A tal que las filas $F_1, \dots, F_p, F_s$ son linealmente independientes. Construyamos la matriz A'_p de tamaño $(p+1) \times n$ siguiente:

$$A'_p = \left(\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & \cdots & a_{1p} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pp} & \cdots & a_{pn} \\ \hline a_{s1} & \cdots & a_{sp} & \cdots & a_{sn} \end{array} \right) = (F_1 | \dots | F_p | F_s)$$

y al ser sus filas independientes entonces $\mathbf{rg}(A'_p) = p + 1$.

Ahora bien, dado que el rango de una matriz es tanto el número de filas linealmente independientes como el número de columnas independientes, entonces la matriz A'_p también tiene $p + 1$ columnas linealmente independientes. De esto se concluye que existe una columna C_j , con $j > p$ tal que $C_1, \dots, C_p, C_j$ son $p + 1$ columnas linealmente independientes.

Entonces, definiendo A_{p+1} como:

$$A_{p+1} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1p} & a_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pp} & a_{pl} \\ \hline a_{s1} & \cdots & a_{sp} & a_{sl} \end{array} \right)$$

que es de orden $(p+1) \times (p+1)$ por construcción tiene rango $p+1$. $\square$

Teorema 1.25: 1.96 Rango de una matriz por menores.

El rango de una matriz A es igual al mayor orden de un menor no nulo de A .

Demostración

Sea p el mayor orden de un menor no nulo de A . Entonces, por la **Proposición 1.13**, existe una submatriz A_p cuadrada de orden p tal que $\det(A_p) \neq 0$ y $\mathbf{rg}(A_p) = p$. Entonces $p = \mathbf{rg}(A_p) \leq \mathbf{rg}(A)$. Veremos que dicha desigualdad debe ser una igualdad. Por reducción al absurdo, si $p < \mathbf{rg}(A)$, entonces, por la **Proposición 1.13**, debe existir una submatriz A_{p+1} de A , de orden $p+1$, y con $\mathbf{rg}(A_{p+1}) = p+1$ y que extiende a la submatriz A_p . Dado que en este caso $\mathbf{rg}(A_{p+1}) = p+1$ entonces $\det(A_{p+1}) \neq 0$, por lo que A tendría un menor no nulo de orden $p+1$; esto es una contradicción. Por tanto, $p = \mathbf{rg}(A_p) = \mathbf{rg}(A)$. $\square$

Ejercicio 1.30: 1.97

Utiliza mediante menores el rango de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.31: 1.98

Hallar el rango de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$