

Capítulo 1

Sucesiones (en cuerpos ordenados)

1.1 Cuerpos ordenados: el terreno de juego

Por qué existe este bloque

Todo el tema transcurre en «un cuerpo ordenado $\mathbb{K}$ ». Si no sabes con precisión qué es eso, y sobre todo si no conoces *varios*, ocurrirá lo siguiente: leerás $\mathbb{K}$ pensando «esto es $\mathbb{R}$ pero no me dejan decirlo», y entonces el tema entero se te volverá una pantomima.

No lo es. $\mathbb{K}$ designa una familia amplia de objetos, y las diferencias entre sus miembros son exactamente lo que este tema estudia. Por eso vamos a ver, además de la definición, **ejemplos y contraejemplos**: cuerpos ordenados que no son $\mathbb{Q}$ ni $\mathbb{R}$, y cuerpos que no admiten ningún orden.

Esquema del bloque

1. Cuerpo: recordatorio compacto.
2. Cuerpo ordenado, definido por su *cono positivo*.
3. Lo que se deduce enseguida, incluido $1 > 0$.
4. Valor absoluto y desigualdad triangular: la herramienta de trabajo del curso.
5. **Ejemplos**: cuatro cuerpos ordenados distintos.
6. **No-ejemplos**: dos cuerpos que *no* se pueden ordenar, y por qué.
7. Un cuerpo ordenado donde $(\frac{1}{n})$ **no** tiende a cero.

Objetivos de aprendizaje

1. Enunciar los axiomas de cuerpo ordenado sin mirar. **[R]**
2. Deducir de ellos que $a^2 > 0$ para $a \neq 0$, y por tanto que $1 > 0$.
3. Dar al menos tres ejemplos de cuerpos ordenados distintos.
4. Explicar por qué $\mathbb{C}$ y $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ no admiten ningún orden compatible.
5. Explicar por qué la afirmación « $\lim_n \frac{1}{n} = 0$ » **no** es válida en todo cuerpo ordenado.

1.1.1 Cuerpo

Definición 1.1 — Cuerpo (abeliano)

Un **cuerpo abeliano** es un conjunto $\mathbb{K}$ con dos operaciones, $+$ y $\cdot$, tales que:

1. $(\mathbb{K}, +)$ es un grupo abeliano, con neutro 0 y opuesto $-a$;
2. $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ es un grupo abeliano, con neutro $1 \neq 0$ e inverso a^{-1} ;
3. el producto es distributivo respecto de la suma: $a(b + c) = ab + ac$.

Nada más. Suma, resta, multiplicación y división por elementos no nulos: eso es un cuerpo. Obsérvese que *no* hay ninguna noción de tamaño, ni de orden, ni de cercanía. Un cuerpo, por sí solo, no permite decir que un elemento sea «mayor» que otro ni que dos elementos estén «próximos».

Nota

En un cuerpo conmutativo infinito (no todos los son) siempre existe una copia de $\mathbb{N}$, cuyos elementos son el resultado de sumar sucesivamente el elemento neutro del cuerpo:

$$\mathbb{N} = \{1, 1 + 1, 1 + 1 + 1, \dots\} \subseteq \mathbb{K} \quad (1.1)$$

una copia del conjunto de los enteros:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -1 - 1, -1, 0, 1, 1 + 1, 1 + 1 + 1, \dots\} \subseteq \mathbb{K} \quad (1.2)$$

y una copia del conjunto de los racionales:

$$\mathbb{Q} = \{a \cdot b^{-1} \in \mathbb{K} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\} \subseteq \mathbb{K} \quad (1.3)$$

1.1.2 Cuerpo ordenado

Para ordenar un cuerpo no se declara la relación $\leq$ directamente, sino que se declara **cuáles son los elementos positivos**, y de ahí sale el orden. Es más económico y es el camino que sigue el texto.

Definición 1.2 — Cuerpo ordenado

Un **cuerpo ordenado** es un cuerpo $\mathbb{K}$ en el que se ha distinguido un subconjunto $\mathbb{K}^+$, llamado **cono positivo** o conjunto de los elementos positivos, que verifica:

(O1) $0 \notin \mathbb{K}^+$.

(O2) *Tricotomía*: para cada $a \in \mathbb{K}$ se verifica una y sólo una de las tres propiedades

$$a \in \mathbb{K}^+, \quad a = 0, \quad -a \in \mathbb{K}^+. \quad (1.4)$$

(O3) *Estabilidad*: si $a, b \in \mathbb{K}^+$, entonces $a + b \in \mathbb{K}^+$ y $ab \in \mathbb{K}^+$.

Dónde vas a reencontrarte con esto

Estos tres axiomas son, literalmente, los axiomas VII, VIII y IX de la lista axiomática de $\mathbb{R}$ del Tema 2 en la subsección ???. Y son los mismos que se verifican en §4.3 de este tema, cuando comprobemos que el cuerpo que construimos es ordenado. Merece la pena tenerlos frescos: los vas a usar varias veces.

Definición 1.3 — Orden en un cuerpo ordenado

A partir de $\mathbb{K}^+$ se define

$$a < b \iff b - a \in \mathbb{K}^+, \quad (1.5)$$

y se escribe $a \leq b$ para expresar que $a < b$ o $a = b$.

1.1.3 Consecuencias inmediatas

De los axiomas de cuerpo ordenado (O1)–(O3) y de la construcción de su orden en la Definición 1.3 con la identidad (1.5) se deduce, sin más herramientas, todo el álgebra de desigualdades que usarás sin pensar durante el curso:

Proposición 1.1 — Desigualdades

En todo cuerpo ordenado $\mathbb{K}$ se verifica:

1. *Transitividad*: si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.
2. *Compatibilidad con la suma*: si $a < b$, entonces $a + c < b + c$ para todo c .
3. *Compatibilidad con el producto*: si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$.
Si $c < 0$, la desigualdad **se invierte**: $ac > bc$.

Demostración.

1. En efecto, $c - a = (c - b) + (b - a)$ es suma de positivos.
2. Si $a < b$, entonces $b - a \in \mathbb{K}^+$. Pero dado que:

$$(b + c) - (a + c) = b - a \in \mathbb{K}^+$$

entonces se tiene que $a + c < b + c$.

3. De $a < b$ y $0 < c$ se llega a que:

$$b - a, c \in \mathbb{K}^+$$

Por (O3) se tiene que su producto también es positivo $(b - a) \cdot c \in \mathbb{K}^+$; como:

$$bc - ac = (b - a) \cdot c \in \mathbb{K}^+$$

entonces se tiene que $ac < bc$.

Para el caso $a < b$ y $c < 0$, se tiene que $b - a, -c \in \mathbb{K}^+$. Por (O3) se tiene que su producto también es positivo $(b - a) \cdot (-c) \in \mathbb{K}^+$; como:

$$ac - bc = (b - a) \cdot (-c) \in \mathbb{K}^+$$

entonces se tiene que $bc < ac$.

■

Proposición 1.2 — Los cuadrados son positivos

En todo cuerpo ordenado $\mathbb{K}$, si $a \neq 0$ entonces $a^2 > 0$. En particular, $1 > 0$.

Demostración. Por tricotomía, o bien $a \in \mathbb{K}^+$, o bien $-a \in \mathbb{K}^+$.

- En el primer caso ($a \in \mathbb{K}^+$), (O3) da $a \cdot a = a^2 \in \mathbb{K}^+$.
- En el segundo caso ($-a \in \mathbb{K}^+$), (O3) aplicado a $-a$ da

$$(-a)(-a) = a^2 \in \mathbb{K}^+$$

En ambos casos $a^2 > 0$.

Para la segunda afirmación basta observar que $1 \neq 0$ por la definición de cuerpo, y que $1 = 1^2$. ■

Proposición 1.3 — El uno es positivo (alternativo)

En un cuerpo ordenado $\mathbb{K}$, se verifica $0 < 1$.

Demostración. Supongamos por reducción al absurdo que $1 \leq 0$. Entonces o bien $1 = 0$ o bien $1 < 0$.

- Si $1 = 0$, esto contradice el axioma de cuerpo que exige $1 \neq 0$.
- Si $1 < 0$, entonces $-1 \in \mathbb{K}^+$ (por definición de orden). Pero entonces $(-1) + 1 = 0 \in \mathbb{K}^+$ (cierre de $\mathbb{K}^+$ bajo suma), lo que contradice $0 \notin \mathbb{K}^+$.

Por lo tanto, $0 < 1$. ■

Proposición 1.4 — El menos uno es negativo

En un cuerpo ordenado $\mathbb{K}$, se verifica $-1 < 0 < 1$.

Demostración. Por la Proposición 1.1.3, $1 > 0$. Por tricotomía, o bien $-1 \in \mathbb{K}^+$, o bien $-1 = 0$, o bien $-(-1) = 1 \in \mathbb{K}^+$.

Como $1 \in \mathbb{K}^+$ (pues $1 > 0$), la tercera opción es cierta. Luego $-1 \notin \mathbb{K}^+$ y $-1 \neq 0$, así que $-1 < 0$. ■

Proposición 1.5 — Corolario: Monotonía de la suma

Sean $a, b, c, d \in \mathbb{K}$ con $a < b$ y $c < d$. Entonces $a + c < b + d$.

Demostración. Por la Proposición 1.1.(2) aplicada a $a < b$ con sumando c : $a + c < b + c$. Nuevamente por la Proposición 1.1.(2) aplicada a $c < d$ con sumando b : $b + c < b + d$. Por la Proposición 1.1.(1): $a + c < b + d$. ■

Proposición 1.6 — El inverso de un positivo es positivo

Sea $a \in \mathbb{K}$ con $a > 0$. Entonces $a^{-1} > 0$ (donde $a^{-1} = \frac{1}{a}$).

Demostración. Por tricotomía (O2), una de las siguientes es cierta:

1. $a^{-1} > 0$
2. $a^{-1} = 0$
3. $a^{-1} < 0$

Descartamos (2): Si $a^{-1} = 0$, multiplicamos por $a > 0$:

$$a \cdot a^{-1} = a \cdot 0 = 0.$$

Pero $a \cdot a^{-1} = 1 > 0$ por definición de inverso; por tanto contradicción.

Descartamos (3): Si $a^{-1} < 0$, entonces $a^{-1} \in -\mathbb{K}^+$. Multiplicamos $a^{-1} < 0$ por $a > 0$ usando la Proposición 1.1:

$$a \cdot a^{-1} < a \cdot 0 = 0.$$

Pero $a \cdot a^{-1} = 1 > 0$; por tanto contradicción.

Por lo tanto, (1) es cierta: $a^{-1} > 0$. ■

Proposición 1.7 — Orden de inversos en el mismo signo

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo ordenado. Si $0 < a < b$, entonces

$$0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}.$$

Demostración. Como $0 < a < b$, ambos a y b son positivos, así que por la Proposición 1.6, $\frac{1}{a} > 0$ y $\frac{1}{b} > 0$.

Multiplicamos la desigualdad $a < b$ por el factor positivo $\frac{1}{ab} > 0$ (producto de dos positivos) usando la Proposición 1.1.(3):

$$a \cdot \frac{1}{ab} < b \cdot \frac{1}{ab}$$

donde simplificando se tiene que:

$$\frac{1}{b} < \frac{1}{a}.$$

Así pues, $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$. ■

Una proposición pequeña con consecuencias grandes

Que $1 > 0$ parece una obviedad y no lo es: es un *teorema*, y su demostración es la de arriba. De él se sigue $1 + 1 > 0$, $1 + 1 + 1 > 0$, y así sucesivamente: **en todo**

cuerpo ordenado, la copia de $\mathbb{N}$ vive en el lado positivo y sus elementos son todos distintos. Un cuerpo ordenado es, por fuerza, infinito.

Y de la Proposición 1.2 sale, como veremos enseguida, la razón por la que ciertos cuerpos muy conocidos *no* se pueden ordenar de ninguna manera.

Proposición 1.8 — Los naturales en un cuerpo ordenado

Todo cuerpo ordenado $\mathbb{K}$ contiene al conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, y por tanto $\mathbb{K}$ es necesariamente infinito.

Demostración. Definimos el conjunto de los naturales como:

$$\mathbb{N} = \{1, 1 + 1, 1 + 1 + 1, \dots\}$$

Todos los objetos de $\mathbb{N}$ son distintos; en efecto, si por ejemplo:

$$1 = 1 + 1 + 1 + 1$$

entonces cancelando se tendría:

$$0 = 1 + 1 + 1$$

lo cual es imposible ya que al ser $1 > 0$ la suma de una o mas veces el valor 1 debe ser también estrictamente positivo, es decir, debe estar en $\mathbb{K}^+$.



1.1.4 Valor absoluto

Definición 1.4 — Valor absoluto

En un cuerpo ordenado $\mathbb{K}$ se define

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0, \\ -a & \text{si } a < 0. \end{cases} \quad (1.6)$$

Las dos propiedades que vas a usar en *todas* las demostraciones del curso son:

Proposición 1.9 — Desigualdades triangulares

Para todo a, b de un cuerpo ordenado:

$$|a + b| \leq |a| + |b|, \quad (1.7)$$

$$||a| - |b|| \leq |a - b|. \quad (1.8)$$

Punto crítico

Las desigualdades (1.7) y (1.8) son **la** herramienta de este tema. Prácticamente todas las demostraciones que vas a ver consisten en acotar una cantidad partiéndola en trozos con la triangular. Si no las tienes automatizadas, vuelve a los apuntes de prerequisites antes de continuar: no es material opcional.

Y una lectura que ayuda a recordarlas:

Una expresión como $|a - b|$ es la *distancia* entre a y b . La desigualdad (1.7) dice que ir de a a c pasando por b nunca es más corto que ir directamente.

1.1.5 Ejemplos, sin demostración.

Ejemplo 1.1 — $\mathbb{Q}$, los números racionales

El ejemplo básico. Es un cuerpo ordenado siendo los positivos

$$\mathbb{Q}^+ = \{p/q : p, q \text{ enteros del mismo signo}\}.$$

No es completo, y demostrarlo es el objetivo de la Sección 1.4.

Ejemplo 1.2 — $\mathbb{R}$, los números reales

Cuerpo ordenado y *completo*. Es el que construiremos en la Sección 1.5. Lo mencionamos aquí solo para situarlo: hasta que no se haya construido apropiadamente no tenemos derecho a usarlo.

Ejemplo 1.3 — $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, un cuerpo entre medias

Sea

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}. \quad (1.9)$$

Es un cuerpo —la parte no evidente es el inverso, que se obtiene racionalizando:

$$\frac{1}{a + b\sqrt{2}} = \frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2}, \quad (1.10)$$

y el denominador no se anula porque $\sqrt{2}$ es irracional— y hereda el orden de $\mathbb{R}$.

Es un cuerpo ordenado **estrictamente entre** $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$: el cuerpo $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ contiene a $\mathbb{Q}$, contiene a $\sqrt{2}$, y no contiene a $\sqrt{3}$.

En efecto, si fuese $\sqrt{3} = a + b\sqrt{2}$, entonces elevando al cuadrado saldría $3 = a^2 + 2b^2 + 2ab\sqrt{2}$, luego $ab = 0$; con $b = 0$ quedaría $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$ y con $a = 0$ quedaría $b^2 = 3/2$, ambas imposibles.

Por tanto el cuerpo $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ es distinto de $\mathbb{R}$.

Lo que enseña $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$

Este ejemplo desmonta dos ideas falsas a la vez:

1. **Los cuerpos ordenados no son solo $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$.** Hay infinitos, y algunos viven entre los dos.
2. **Tapar un agujero no los tapa todos.** Hemos añadido $\sqrt{2}$ y hemos obtenido un cuerpo ordenado que sigue sin ser completo: le falta $\sqrt{3}$, le falta π , le faltan infinitos.

El segundo punto explica por qué la construcción de la Sección 1.5 es tan laboriosa. No se trata de añadir los agujeros de uno en uno —eso no termina nunca—, sino de todos a la vez.

1.1.6 No-ejemplos: cuerpos que no se pueden ordenar

Aquí es donde la Proposición 1.2 se cobra.

Ejemplo 1.4 — $\mathbb{C}$ no admite ningún orden compatible

$\mathbb{C}$ es un cuerpo perfectamente respetable. Pero **no existe** ningún $\mathbb{C}^+$ que verifique (O1)–(O3).

En efecto: si lo hubiera, por la Proposición 1.2 sería $a^2 > 0$ para todo $a \neq 0$. Tomando $a = i$ resultaría $i^2 = -1 > 0$; pero también $1 = 1^2 > 0$, y sumando, $(-1) + 1 = 0 > 0$, en contra de (O1).

Ejemplo 1.5 — Los cuerpos finitos tampoco

Sea p primo y $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ el cuerpo de las clases de restos módulo p . Tampoco admite orden.

En efecto: si lo admitiera, sería $1 > 0$, y sumando repetidamente, $\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_k > 0$ para todo k . Pero para $k = p$ esa suma vale 0, en contra de (O1).

Y $\mathbb{Z}$, que se queda a medio camino

$\mathbb{Z}$ está ordenado y su orden verifica (O1)–(O3), pero **no es un cuerpo**: 2 no tiene inverso.

Es un ejemplo útil de que las dos condiciones —ser cuerpo y estar ordenado— son independientes:

$\mathbb{Z}$: ordenado, no cuerpo.

$\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$: cuerpos, no ordenables.

$\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{R}$: cuerpos ordenados.

1.1.7 Un cuerpo ordenado incómodo

Queda el ejemplo más instructivo, y el que explica una hipótesis que te encontrarás en el Tema 2.

Ejemplo 1.6 — Las funciones racionales, ordenadas por su tamaño en el infinito

Sea $\mathbb{Q}(t)$ el conjunto de las funciones racionales $P(t)/Q(t)$ con coeficientes racionales y $Q \neq 0$. Es un cuerpo (intenta demostrarlo como ejercicio).

Lo ordenamos declarando el conjunto de elementos positivos:

$$\frac{P}{Q} \in \mathbb{Q}(t)^+ \iff \begin{array}{l} \text{los coeficientes directores de } P \text{ y } Q \\ \text{tienen el mismo signo,} \end{array} \quad (1.11)$$

es decir, declarando positivas las funciones que acaban siendo positivas para valores grandes de t .

Se comprueba sin dificultad que (O1)–(O3) se cumplen: $\mathbb{Q}(t)$ es un cuerpo ordenado.

Aquí t es más grande que todos los naturales

Con este orden, para todo número natural n se tiene

$$t - n \in \mathbb{Q}(t)^+, \quad \text{es decir,} \quad t > n. \quad (1.12)$$

El elemento t es **mayor que todos los naturales a la vez**. Y, en consecuencia, $\frac{1}{t}$ es positivo y menor que $\frac{1}{n}$ para todo n : es un *infinitésimo actual*.

De ahí sale el hecho que debes retener:

En $\mathbb{Q}(t)$, la sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)$ **no** converge a cero.

En efecto: tomando $\varepsilon = \frac{1}{t} > 0$, se tiene $|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} > \frac{1}{t} = \varepsilon$ **para todos** los n , no solo para algunos. No hay ningún n_0 que sirva.

Por qué esto importa, y mucho

Vuelve al primer ejemplo de la Sección 1.2: allí probamos que $\lim_n \frac{1}{n} = 0$ en $\mathbb{Q}$, y la demostración necesitaba un natural $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Dejamos anotado que eso era una deuda. Acabas de ver por qué era una deuda de verdad y no una formalidad: en $\mathbb{Q}(t)$ no existe tal n_0 , y el resultado **es falso**. La propiedad que lo hace funcionar en $\mathbb{Q}$ se llama **arquimedianidad**:

para cada $a \in \mathbb{K}$ existe un elemento natural n con $a < n$.

$\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ y $\mathbb{R}$ la tienen. $\mathbb{Q}(t)$ no.

Y esto explica una cosa que si no resultaría misteriosa: cuando en el Tema 2 se demuestre que *dos cuerpos ordenados arquimedianos y completos son isomorfos*, la palabra «arquimedianos» no está ahí de adorno. Sin ella el teorema es falso, y $\mathbb{Q}(t)$ es el testigo de que hay cuerpos ordenados fuera de ese redil.

Lo esencial de este bloque

1. Un **cuerpo ordenado** es un cuerpo con un cono positivo $\mathbb{K}^+$ que cumple (O1) $0 \notin \mathbb{K}^+$, (O2) tricotomía y (O3) estabilidad para $+$ y $\cdot$. El orden se define por $a < b \iff b - a \in \mathbb{K}^+$.
2. En todo cuerpo ordenado, $a^2 > 0$ si $a \neq 0$; en particular $1 > 0$ y el cuerpo es infinito.
3. El **valor absoluto** y las dos desigualdades triangulares son la herramienta de trabajo de todo el curso.
4. **Ejemplos:** $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}(t)$.
5. **No-ejemplos:** $\mathbb{C}$ y $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ no admiten ningún orden compatible (por $a^2 > 0$). $\mathbb{Z}$ está ordenado pero no es cuerpo.
6. $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ enseña que tapar un agujero no los tapa todos.
7. $\mathbb{Q}(t)$ enseña que hay cuerpos ordenados **no arquimedianos**, y que en ellos $(\frac{1}{n})$ no tiende a cero. Por eso «arquimadiano» será una hipótesis de verdad en el Tema 2.

** Píldora de estudio**

1. Demuestra, solo con (O1)–(O3), que si $a < b$ y $c < 0$ entonces $ac > bc$. Es el paso que más se usa sin pensar y conviene haberlo hecho una vez.
2. Comprueba que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ es cerrado para el producto, y verifica (1.10).
3. Justifica que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Lo vas a necesitar en la Sección 1.4, y es el argumento clásico de paridad.
4. En $\mathbb{Q}(t)$, ordena de menor a mayor: $\frac{1}{t^2}$, $\frac{1}{t}$, 1 , t , t^2 , $\frac{t+1}{t}$. ¿Cuál de ellos está más cerca de 1?
5. ¿Es $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ arquimadiano? ¿Es completo? Razona ambas respuestas.