

1.2 Sucesiones convergentes: El significado preciso de «tender a»

Esquema del bloque

1. Qué es una sucesión, y por qué trabajamos en un cuerpo ordenado $\mathbb{K}$ cualquiera, en lugar de $\mathbb{R}$.
2. Sucesiones acotadas: el primer encuentro con el orden de los cuantificadores.
3. **La definición de límite.** El centro de todo.
4. Tres ejemplos de sucesiones, uno de ellos un contraejemplo.
5. Tres consecuencias inmediatas: unicidad, acotación, y el producto por un infinitésimo.

Objetivos de aprendizaje

Al terminar esta sección debes ser capaz de:

1. Escribir la definición de límite *sin una palabra fuera de sitio*, y escribir su negación.
2. **Verificar** un límite concreto exhibiendo un n_0 que dependa de ε .
3. Demostrar que una sucesión dada *no* converge.
4. Reproducir las demostraciones de la unicidad del límite y de que toda sucesión convergente está acotada.
5. Explicar, ante cualquier enunciado con varios cuantificadores, *qué cantidad depende de cuál*.

El quinto objetivo es el más importante y el que menos parece un objetivo. Ten paciencia con él.

1.2.1 Antes de empezar: por qué no usamos $\mathbb{R}$

Voz docente

Vas a leer veinticinco páginas en las que nunca aparece $\mathbb{R}$, y en las que no se puede usar $\sqrt{2}$. Conviene que sepas por qué, o te pasarás el tema peleándote con una prohibición que parece caprichosa.

La razón es sencilla: **vamos a construir $\mathbb{R}$ al final de este mismo tema**. Si lo usáramos ahora, estaríamos definiendo una cosa en términos de sí misma. Así que trabajamos en un cuerpo ordenado genérico, que llamamos $\mathbb{K}$: un conjunto con suma, producto y un orden compatible con ambos, y nada más. Todo lo que demostremos valdrá para cualquiera de ellos.

Después observaremos que $\mathbb{Q}$ es uno de esos $\mathbb{K}$ y que tiene un agujero, y taparemos el agujero. De ahí saldrá $\mathbb{R}$.

Si programas, la analogía es exacta: estamos escribiendo la biblioteca estándar. No podemos importarla.

1.2.2 El objeto de estudio

Definición 1.5 — Sucesión

Una **sucesión** de elementos de un cuerpo ordenado $\mathbb{K}$ es una aplicación del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales en $\mathbb{K}$.

Es una definición de una línea, y esconde una decisión de notación que conviene explicitar. Siendo una aplicación, lo natural sería llamarla a y escribir $a(1), a(2), a(3), \dots$ para sus valores. Pero la costumbre universal es el subíndice: $a_1, a_2, a_3, \dots$, y designar la sucesión entera por (a_n) . No hay nada matemático en esa elección; es solo tradición. Pero como toda notación cómoda, invita a confundir cosas.

Tres objetos distintos que la notación amontona

- (a_n) es *la sucesión*: la aplicación completa.
- a_n es *un término*: un elemento de $\mathbb{K}$.
- $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ es *el conjunto de sus términos*.

Parece una distinción escolar y no lo es. La sucesión $((-1)^n)$ tiene infinitos términos y su conjunto de términos es $\{-1, 1\}$, que tiene dos elementos. Cuando en el Tema 10 estudiemos puntos de aglomeración, esa diferencia será el corazón del asunto.

Ejemplo 1.7 — Dos sucesiones de números racionales

Los símbolos

$$\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{y} \quad \left(\frac{2n-1}{n^2}\right) \quad (1.13)$$

designan las sucesiones (a_n) y (b_n) definidas, para cada $n \in \mathbb{N}$, por

$$a_n = \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad b_n = \frac{2n-1}{n^2}, \quad (1.14)$$

es decir,

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, & a_2 &= \frac{1}{2}, & a_3 &= \frac{1}{3}, & \dots \\ b_1 &= 1, & b_2 &= \frac{3}{4}, & b_3 &= \frac{5}{9}, & \dots \end{aligned} \quad (1.15)$$

Calcula tú b_4 y b_5 antes de seguir. Es medio minuto y fija la notación mejor que releer el párrafo.

1.2.3 Sucesiones acotadas

Definición 1.6 — Sucesión acotada

Se dice que una sucesión (a_n) de elementos de un cuerpo ordenado $\mathbb{K}$ está **acotada** en $\mathbb{K}$ cuando existe un $c > 0$ de $\mathbb{K}$ tal que

$$|a_n| \leq c \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \quad (1.16)$$

Por ejemplo, en $\mathbb{Q}$ la sucesión $(\frac{1}{n})$ está acotada, porque $|\frac{1}{n}| \leq 1$ para todo n .

Y aquí, en la segunda definición del tema, aparece ya la trampa que va a perseguirte durante doce temas.

Errores frecuentes

Compara estas dos frases:

$$\exists c > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq c \quad (\text{la definición de acotada}) \quad (1.17)$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists c > 0 : |a_n| \leq c \quad (\text{no dice nada}) \quad (1.18)$$

Las mismas palabras, distinto orden. La primera pide **una sola cota que sirva para todos los términos a la vez**. La segunda permite que la cota cambie con n , y entonces la cumple *cualquier* sucesión: dado n , siempre puedes tomar $c = |a_n| + 1$.

Una definición que cumple todo el mundo no distingue nada, y por tanto es inútil. **El orden de los cuantificadores no es una convención de escritura: es el contenido matemático de la frase.**

La lectura de dependencias

Esta es la herramienta más rentable de todo el curso, y la vas a usar hasta el último día. Consiste en leer una cadena de cuantificadores como una **declaración de dependencias**:

*Todo lo cuantificado **después** de una cantidad puede depender de ella.*

*Todo lo cuantificado **antes** no puede.*

En (1.17), c aparece antes que n : luego c *no* puede depender de n . Se dice que la cota es **uniforme en** n . En (1.18), c aparece después: puede depender de n , y ahí se hunde la definición.

Si programas, esto es literalmente una firma de tipo. La primera declara una constante; la segunda, una función de n . No son lo mismo, y confundirlas es un error de tipos. Retén la palabra *uniforme*. Volverá en el Tema 6 convertida en un concepto con nombre propio.

1.2.4 El límite

Pregunta que nos guía

¿Qué significa exactamente que una sucesión «se acerca» a un número?

La intuición no basta, y conviene ver por qué antes de leer la definición. «Acercarse» sugiere que los términos van estando cada vez más cerca. Pero la sucesión $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ no se acerca a 0 *en cada paso* —a veces se queda quieta— y sin embargo su límite es 0. Y la sucesión $0,9; 0,99; 0,999; \dots$ está siempre más cerca de 1 que la anterior, pero nunca lo alcanza. ¿Se acerca «lo suficiente»?

La respuesta griega a este problema es un cambio de pregunta. En vez de describir el movimiento, se fija un *objetivo de precisión* y se pregunta si la sucesión acaba cumpliéndolo. Y como el objetivo puede ser tan exigente como se quiera, la sucesión tiene que cumplirlos todos.

Definición 1.7 — Límite de una sucesión

Se dice que una sucesión (a_n) de elementos de un cuerpo ordenado $\mathbb{K}$ **converge** hacia un elemento $a \in \mathbb{K}$, o que tiene por **límite** $a \in \mathbb{K}$, y se escribe

$$\lim_n a_n = a, \quad (1.19)$$

cuando para cada $\varepsilon > 0$ de $\mathbb{K}$ existe un número natural n_0 tal que

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq n_0. \quad (1.20)$$

La firma de la definición

Escrita con cuantificadores, (1.20) es

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon. \quad (1.21)$$

Aplica la lectura de dependencias:

- n_0 va *después* de $\varepsilon \implies n_0$ **depende de** ε . Por eso conviene escribir $n_0(\varepsilon)$ durante las primeras semanas, hasta que sea automático.
- ε va *antes* que $n \implies \varepsilon$ **no puede depender de** n . Un « ε » que cambiara con el término no significaría nada.

El contrato es: *tú me pides una precisión, yo te digo a partir de qué término la garantizo*. Cuanto más exigente sea tu ε , más lejos estará mi n_0 . Esa es toda la definición.

Dos maneras de leerla que conviene tener a mano

Geométrica. $|a_n - a|$ es la distancia entre a_n y a . La definición dice que *toda banda alrededor de a , por estrecha que sea, contiene a los términos de la sucesión a partir*

de uno de ellos. En el Tema 4 esa banda tendrá nombre —entorno— y la definición se reescribirá sin épsilon.

Finitista. «Para todo $n \geq n_0$ » equivale a decir *salvo un número finito de términos*. Los primeros pueden hacer lo que quieran. De aquí sale gratis un hecho útil: cambiar mil términos de una sucesión no cambia su límite. El límite no ve ningún trozo inicial finito.

Primer ejemplo, y cómo se encuentra realmente una demostración

Ejemplo 1.8 — La sucesión $(\frac{1}{n})$ tiene límite 0 en $\mathbb{Q}$

Para cualquier $\varepsilon > 0$ de $\mathbb{Q}$ existe un número natural $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$, y entonces

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq n_0. \quad (1.22)$$

Las dos escrituras

Esa demostración es de tres líneas y parece caída del cielo. ¿De dónde sale el $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$? Aquí está el truco que ningún libro cuenta y que conviene que veas desde el primer día: **las demostraciones se encuentran hacia atrás y se escriben hacia adelante.**

Borrador (lo que haces en sucio). Quiero llegar a $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$, o sea $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Despejando, eso ocurre exactamente cuando $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Luego me basta con elegir n_0 mayor que $\frac{1}{\varepsilon}$ y no preocuparme más.

Versión limpia (lo que entregas). Dado $\varepsilon > 0$, sea $n_0 \in \mathbb{N}$ con $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Para $n \geq n_0$ se tiene $|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$.

Es el mismo razonamiento recorrido en sentido contrario. Cuando leas una demostración y pienses «a mí no se me habría ocurrido», recuerda que estás viendo la versión limpia de alguien que hizo el borrador en un papel que tiró.

Una deuda, que pagaremos

La frase «existe un número natural $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ » parece obvia y no lo es: afirma que los naturales no están acotados en $\mathbb{Q}$. Esa propiedad se llama *arquimedianidad* y se formaliza en el Tema 2. Aquí la usamos a crédito, y conviene que sepas que la estamos usando.

Ejemplo 1.9 — La sucesión constante

Para cualquier $a \in \mathbb{K}$, la sucesión definida por $a_n = a$ para todo n tiene límite a , pues para cada $\varepsilon > 0$ de $\mathbb{K}$

$$|a_n - a| = |a - a| = 0 < \varepsilon \quad \text{para todo } n. \quad (1.23)$$

El caso degenerado, sí. Pero lo usaremos como comodín en varias demostraciones, así que conviene tenerlo enunciado.

Cómo se demuestra que algo no converge

Ejemplo 1.10 — Una sucesión sin límite

La sucesión de números racionales (a_n) definida por

$$a_n = \begin{cases} -1 & \text{si } n \text{ es impar,} \\ 1 & \text{si } n \text{ es par,} \end{cases} \quad (1.24)$$

no tiene límite.

Demostración. Por reducción al absurdo. Supongamos que existe un número racional a con $\lim_n a_n = a$. Para $\varepsilon = 1$ existiría entonces un n_0 tal que $|a_n - a| < 1$ para todo $n \geq n_0$. Tomando un $n \geq n_0$ impar resulta $|-1 - a| < 1$, y tomando un $n \geq n_0$ par resulta $|1 - a| < 1$. Por tanto se verificarían a la vez

$$-1 < -1 - a < 1 \quad \text{y} \quad -1 < 1 - a < 1, \quad (1.25)$$

es decir,

$$0 < -a < 2 \quad \text{y} \quad -2 < -a < 0, \quad (1.26)$$

lo cual es imposible. ■

Por qué $\varepsilon = 1$, y no otro

No hay magia en el 1. La sucesión tiene dos valores separados por una distancia 2, así que cualquier $\varepsilon \leq 1$ obliga a la banda a contener uno solo de los dos, y de ahí sale la contradicción. Con $\varepsilon = 3$ no habría contradicción ninguna: la banda daría cabida a los dos valores.

Esto es un *movimiento* reutilizable, y merece nombre: **elegir ε a medida**. Volverá tres veces en este tema.

Negar la definición

Para probar que algo no converge hay que negar (1.21). La negación correcta es

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq n_0 : |a_n - a| \geq \varepsilon. \quad (1.27)$$

Tres cosas que salen mal casi siempre:

1. Cada $\forall$ pasa a $\exists$ y cada $\exists$ pasa a $\forall$. *Todos*, no solo el primero.
2. La desigualdad estricta $<$ se convierte en $\geq$, **no** en $>$. Es el error que más demostraciones por reducción al absurdo arruina.

3. Fíjate en lo que dice (1.27): no que los términos se alejen, sino que *por lejos que vayas, siempre encontrarás algún término* a distancia $\geq \varepsilon$. Basta con que haya infinitos términos rebeldes, aunque haya también infinitos buenos.

Punto crítico

Si en este momento no puedes escribir (1.20) y (1.27) de memoria y sin dudar, para aquí. No sigas al apartado siguiente. Todo lo que viene después las usa como material de construcción, y arrastrar una duda sobre ellas hace que las demostraciones posteriores parezcan arbitrarias cuando no lo son.

1.2.5 Tres consecuencias inmediatas

Ya tenemos la definición. Veamos qué se puede extraer de ella sin añadir ninguna hipótesis. Las tres proposiciones que siguen son cortas, y su verdadero valor no está en el enunciado sino en los *movimientos* que introducen: son las herramientas con las que se construye el resto del curso.

Proposición 1.10 — Unicidad del límite

Si (a_n) es una sucesión convergente en un cuerpo ordenado $\mathbb{K}$, entonces su límite es único.

Demostración. Si a y a' fuesen ambos límites de (a_n) , para cada $\varepsilon > 0$ de $\mathbb{K}$ existirían números naturales n_1 y n_2 tales que

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad |a_n - a'| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (1.28)$$

para $n \geq n_1$ y $n \geq n_2$ respectivamente. Entonces, para $n \geq \max\{n_1, n_2\}$,

$$|a - a'| = |a - a_n + a_n - a'| \leq |a_n - a| + |a_n - a'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad (1.29)$$

Como esto vale para *todo* $\varepsilon > 0$, ha de ser $|a - a'| = 0$ y por tanto $a = a'$. En efecto: si fuese $|a - a'| > 0$, tomando $\varepsilon = \frac{1}{2}|a - a'|$ resultaría $|a - a'| < \frac{1}{2}|a - a'|$, lo cual es imposible. ■

Los tres movimientos que acabas de ver

Esta demostración es corta y contiene tres técnicas que sostienen medio curso. Conviene bautizarlas:

Repartir ε . Cuando hay dos hipótesis que aportan cada una un poco de error, se le pide $\varepsilon/2$ a cada una para que la suma salga ε .

Tomar el máximo. Cada hipótesis da su propio n_0 ; con $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ valen las dos a la vez.

El cierre. Si $|x| < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, entonces $x = 0$.

Los tres reaparecen en la Sección 1.3, en la Sección 1.4 y en la construcción de $\mathbb{R}$. Reconócelos cuando vuelvan.

«¿Por qué puedo pedir $\varepsilon/2$?»

Es la objeción que todo el mundo tiene la primera vez y casi nadie formula en voz alta, así que la formulamos aquí: parece que estamos haciendo trampa, eligiendo el error a conveniencia.

No la hay. La hipótesis dice que la propiedad vale *para cada* $\varepsilon > 0$. Y $\varepsilon/2$ es un número positivo. Luego la hipótesis vale también para él. Podríamos haber pedido $\varepsilon/7$ o $\varepsilon/100$; se pide $\varepsilon/2$ porque hay dos sumandos y así la cuenta sale redonda.

Vuelve a la lectura de dependencias: ε está cuantificado universalmente *al principio*. Eso significa que quien demuestra puede instanciarlo con lo que le convenga.

Proposición 1.11 — Toda sucesión convergente está acotada

Si (a_n) es una sucesión convergente de elementos de un cuerpo ordenado $\mathbb{K}$, entonces (a_n) está acotada en $\mathbb{K}$.

Demostración. Sea $\lim_n a_n = a$. Para $\varepsilon = 1$ existe un número natural n_0 tal que $|a_n - a| < 1$ para todo $n \geq n_0$, y por tanto, para $n \geq n_0$,

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|. \quad (1.30)$$

Tomando ahora

$$c = 1 + |a| + |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{n_0-1}|, \quad (1.31)$$

se tiene $|a_n| \leq c$ para todo n . ■

La estructura: cola infinita + cabeza finita

Fíjate en el reparto del trabajo. La definición de límite controla la *cola* —los términos desde n_0 en adelante— y ahí basta $1 + |a|$. Los términos anteriores son *finitos*, y a un conjunto finito siempre se le puede poner cota sumándolo todo.

La suma (1.31) da la impresión de ser una barbaridad, y lo es: nadie pretende que sea la mejor cota. **En análisis las cotas se regalan.** No buscamos la óptima, buscamos *una*. Acostúmbrate ya, porque esta actitud reaparece en cada demostración del curso. Este patrón —partir la sucesión en cabeza finita y cola infinita— es de los más reutilizados del tema. Lo verás idéntico dos veces más.

El recíproco es falso

Que toda convergente esté acotada **no** significa que toda acotada converja. El contraejemplo lo tienes tres páginas atrás: la sucesión (1.24) cumple $|a_n| \leq 1$ para todo n y no tiene límite.

Guárdalo. Es la primera entrada de un catálogo de contraejemplos que iremos construyendo, y su función es precisamente esta: cada vez que te veas tentado de invertir una implicación, buscar antes el monstruo que la rompe.

Proposición 1.12 — Acotada por infinitésimo

Si (a_n) es una sucesión acotada y (b_n) es una sucesión con límite cero, entonces

$$\lim_n a_n b_n = 0. \quad (1.32)$$

Demostración. Como (a_n) está acotada, existe un $c > 0$ de $\mathbb{K}$ tal que $|a_n| < c$ para todo n . Como $\lim_n b_n = 0$, para cada $\varepsilon > 0$ de $\mathbb{K}$ existe un número natural n_0 tal que

$$|b_n| < \frac{\varepsilon}{c} \quad \text{para } n \geq n_0. \quad (1.33)$$

Por consiguiente, para $n \geq n_0$,

$$|a_n b_n| = |a_n| |b_n| < c \cdot \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon, \quad (1.34)$$

luego $\lim_n a_n b_n = 0$. ■

Voz docente

Otra vez la pregunta incómoda: ¿de dónde sale el ε/c de (1.33)?

Del borrador, como siempre. Escribes primero $|a_n b_n| = |a_n| |b_n| < c |b_n|$, miras esa expresión y te preguntas: ¿qué necesito que sea $|b_n|$ para que esto quede por debajo de ε ? La respuesta es $|b_n| < \varepsilon/c$. Y como c es una constante fija y $\varepsilon/c > 0$, la hipótesis $\lim b_n = 0$ te lo concede.

Nota que aquí es esencial que c **no dependa de** n : si dependiera, ε/c tampoco sería constante y no podrías pedirselo a la definición de límite. La uniformidad de la cota, que en (1.17) parecía un tecnicismo, es exactamente lo que hace funcionar esta demostración.

Transversalidad

Lo que acabas de instalar no se queda aquí:

- La definición (1.20) se traduce a *entornos* en el Tema 4 y pierde los épsilon.
- En el Tema 5 la misma gramática, con $x \rightarrow a$ en lugar de $n \rightarrow \infty$, define el límite de una función; verás δ donde ahora ves n_0 .
- La palabra *uniforme* de (1.17) reaparece en el Tema 6 como *continuidad uniforme*, y la única diferencia con la continuidad ordinaria será, otra vez, de qué se permite depender.
- La Proposición 1.12 se usará dos veces en la construcción de $\mathbb{R}$, al final de este mismo tema.

Lo esencial de este bloque

1. Una sucesión es una aplicación $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$. Trabajamos en $\mathbb{K}$ genérico porque $\mathbb{R}$ está todavía por construir.
2. (a_n) está acotada cuando **existe una sola** c que sirve para todos los términos. El orden de los cuantificadores es el contenido.
3. $\lim_n a_n = a$ cuando para cada $\varepsilon > 0$ existe n_0 con $|a_n - a| < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. Y n_0 **depende de** ε .
4. Para probar que algo no converge se niega la definición: cada cuantificador se invierte y $<$ pasa a $\geq$.
5. El límite, si existe, es único. Toda convergente está acotada, pero no al revés. Acotada por infinitésimo da infinitésimo.
6. Movimientos nuevos: repartir ε , tomar el máximo, el cierre ($|x| < \varepsilon$ para todo ε implica $x = 0$), elegir ε a medida, cabeza finita más cola infinita.

** Píldora de estudio**

Tres ejercicios de diez minutos, para hacer ahora y no «cuando haya terminado el tema»:

1. Verifica con la definición que $\lim_n \frac{n}{n+1} = 1$, exhibiendo $n_0(\varepsilon)$. Haz el borrador antes que la versión limpia.
2. Escribe la negación de « (a_n) está acotada» y úsala para probar que (n) no está acotada en $\mathbb{Q}$.
3. Al final de cada demostración de este bloque, escribe su **firma de dependencias**: qué depende de qué. Por ejemplo, para la unicidad: $n_1 = n_1(\varepsilon)$, $n_2 = n_2(\varepsilon)$, $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ *depende solo de* ε ; *ningún* n_0 *depende de* n . Este tercer ejercicio parece burocrático y es el que más rendimiento da.