

1.3 El álgebra de límites

Esquema del bloque

1. Un lema que parece burocrático y sin el cual no hay cocientes.
2. **El teorema del álgebra de límites:** suma, diferencia, producto y cociente.
3. El *término puente*, la técnica más rentable del curso.
4. La letra pequeña: cuatro recíprocos falsos y una asimetría reveladora entre la suma y el producto.

Objetivos de aprendizaje

Al terminar esta sección debes ser capaz de:

1. Enunciar el teorema del álgebra de límites **con sus hipótesis exactas**, sin olvidar ninguna.
2. Reproducir las demostraciones de la suma y del producto.
3. Explicar de dónde sale el término puente y reconocerlo cuando reaparezca.
4. Calcular límites de cocientes de polinomios con soltura.
5. Dar un contraejemplo para cada uno de los recíprocos falsos, y explicar por qué la suma admite un resultado positivo que el producto no admite.

Pregunta que nos guía

Sabemos qué significa que una sucesión converja. ¿Podemos ahora calcular con límites igual que calculamos con números? Y si es así, ¿a qué precio?

1.3.1 Un lema que parece burocrático

Antes del teorema principal necesitamos una pieza técnica. La presento al revés de como suelen presentarse los lemas —primero el problema, después la herramienta— porque de la otra manera no se entiende para qué sirve.

Intenta primero, y choca

Supongamos que ya sabemos que $\lim_n a_n = a$ y $\lim_n b_n = b$, y queremos probar que el cociente converge a a/b . Lo natural es escribir la diferencia y acotarla:

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} \right| = \frac{|a_n b - a b_n|}{|b_n| |b|}. \quad (1.35)$$

El numerador sabremos manejarlo. Pero mira el denominador y hazte dos preguntas incómodas:

1. ¿Y si algún b_n vale cero? Entonces (1.35) ni siquiera está definida.

2. Aunque ninguno valga cero, ¿y si los b_n se acercan mucho a cero? Un denominador diminuto hace explotar la fracción, y no podremos acotarla por nada.

Las dos preguntas tienen la misma respuesta: necesitamos garantizar que $|b_n|$ se mantiene *lejos del cero* a partir de cierto término. Eso es exactamente lo que dice el lema siguiente.

Lema 1.1 — Separación del cero

Si (b_n) es una sucesión de elementos de un cuerpo ordenado $\mathbb{K}$ tal que $\lim_n b_n = b \neq 0$, entonces existe un número natural n_0 tal que

$$|b_n| > \frac{|b|}{2} \quad \text{para } n \geq n_0. \quad (1.36)$$

Demostración. Por ser $\lim_n b_n = b \neq 0$, el número $|b|/2$ es positivo y podemos usarlo como ε : existe un número natural n_0 tal que

$$|b_n - b| < \frac{|b|}{2} \quad \text{para } n \geq n_0. \quad (1.37)$$

Por otra parte, la desigualdad triangular da

$$|b| = |b - b_n + b_n| \leq |b_n - b| + |b_n|, \quad (1.38)$$

de donde, despejando y usando (1.37),

$$|b_n| \geq |b| - |b_n - b| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2} \quad (1.39)$$

para $n \geq n_0$. ■

Lo que este lema regala

Dos cosas, y las dos hacen falta:

1. $b_n \neq 0$ **a partir de** n_0 , luego $1/b_n$ existe de ahí en adelante. Sin esto no hay nada que demostrar porque no hay nada escrito.
2. **Una cota inferior del denominador**, $|b_n| > |b|/2$, que es justo lo que impide que la fracción explote.

Y observa la elección $\varepsilon = |b|/2$: es otra vez el movimiento de *elegir ε a medida*. La mitad no tiene nada de sagrado; con $|b|/3$ saldría igual, cambiando la constante final. Se toma la mitad porque deja la cuenta limpia.

1.3.2 El teorema

Teorema 1.1 — Álgebra de límites

Si (a_n) y (b_n) son dos sucesiones de elementos de un cuerpo ordenado $\mathbb{K}$ tales que

$$\lim_n a_n = a \quad \text{y} \quad \lim_n b_n = b, \quad (1.40)$$

entonces:

1. $\lim_n (a_n + b_n) = a + b.$
2. $\lim_n (a_n - b_n) = a - b.$
3. $\lim_n a_n b_n = ab.$
4. Si $b_n \neq 0$ para todo n y $b \neq 0$, entonces $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$

Las dos hipótesis del apartado 4

Fíjate en que el apartado 4 pide **dos** cosas, y hacen trabajos distintos:

$b_n \neq 0$ **para todo** n es una condición de *higiene*. Sin ella, el símbolo a_n/b_n no designa una sucesión: habría términos sin definir. Es lo que permite *escribir* el enunciado.

$b \neq 0$ es la condición *analítica*. Es la que hace que el resultado sea cierto.

De hecho, si solo supiéramos $b \neq 0$, el Lema 1.1 nos daría $b_n \neq 0$ desde un n_0 en adelante, y como el límite no ve ningún trozo inicial finito, el enunciado seguiría siendo verdad para la cola. La primera hipótesis está para que todo esté definido desde $n = 1$, no porque el análisis la necesite.

Distinguir lo que un enunciado necesita para *escribirse* de lo que necesita para *ser cierto* es una destreza de lectura que se entrena, y este es un buen sitio para empezar.

1.3.3 Las demostraciones

Suma y diferencia

Demostración. (1) Para cada $\varepsilon > 0$ de $\mathbb{K}$ existen números naturales n_1 y n_2 tales que

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para } n \geq n_1 \quad \text{y} \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para } n \geq n_2. \quad (1.41)$$

Llamando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, para todo $n \geq n_0$ resulta

$$|a_n + b_n - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad (1.42)$$

luego $\lim_n (a_n + b_n) = a + b.$

(2) Procediendo igual,

$$|a_n - b_n - (a - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad (1.43)$$

para $n \geq n_0$, luego $\lim_n (a_n - b_n) = a - b$. ■

Nada nuevo

Son los movimientos de la Sección 1.2 aplicados sin variación: repartir ε en mitades, tomar el máximo de los dos índices, cerrar con la desigualdad triangular. Si has entendido la unicidad del límite, esta demostración deberías poder escribirla tú antes de leerla. Inténtalo.

Producto: el término puente

Demostración. (3) La clave está en escribir la diferencia $a_n b_n - ab$ de una manera que permita usar las hipótesis. Sumamos y restamos el mismo término:

$$a_n b_n - ab = a_n b_n - a_n b + a_n b - ab = a_n (b_n - b) + b (a_n - a). \quad (1.44)$$

Por hipótesis, $\lim_n (a_n - a) = 0$ y $\lim_n (b_n - b) = 0$. Ahora bien, la sucesión (a_n) está acotada por ser convergente, y el producto de una sucesión acotada por otra con límite cero tiene límite cero, luego

$$\lim_n a_n (b_n - b) = 0. \quad (1.45)$$

Análogamente, la sucesión constante (b) está acotada, luego

$$\lim_n b (a_n - a) = 0. \quad (1.46)$$

Por consiguiente, en virtud del apartado (1), $\lim_n (a_n b_n - ab) = 0$. ■

El término puente

La igualdad (1.44) es **el movimiento más rentable de todo el curso**, y no se le ocurre a nadie la primera vez. Merece que lo desarmemos.

El problema: queremos comparar $a_n b_n$ con ab . Pero estos dos productos difieren en *los dos* factores a la vez, y nuestras hipótesis solo saben hablar de un factor cada una.

La idea: inventar un producto intermedio —el **puente**— que se parezca al primero en un factor y al segundo en el otro. Aquí el puente es $a_n b$: comparte el a_n con $a_n b_n$ y el b con ab . Sumándolo y restándolo, el salto grande se convierte en dos saltos pequeños, cada uno de los cuales sí sabemos medir.

Podríamos haber elegido ab_n como puente; saldría igual de bien. Lo que importa es la idea, no la elección concreta.

Este movimiento reaparece en la construcción de $\mathbb{R}$, al final de este tema, y otra vez en el Tema 7: la regla de derivación del producto es *exactamente* este mismo puente.

Dónde se cobra el bloque anterior

Esta demostración usa dos resultados de la Sección 1.2, y conviene señalarlo porque es la primera vez que un resultado aparentemente menor se vuelve indispensable:

- Que *toda convergente está acotada* es lo que permite afirmar que (a_n) lo está. Sin cota, $|a_n|$ multiplicaría a algo pequeño y el producto podría no ser pequeño.
- Que *acotada por infinitésimo da infinitésimo* es lo que remata (1.45) y (1.46).

Aquellas dos proposiciones no estaban de adorno.

Cociente

Demostración. (4) Teniendo en cuenta el apartado (3), basta probar que

$$\lim_n \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}, \quad (1.47)$$

puesto que entonces

$$\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \lim_n a_n \cdot \frac{1}{b_n} = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}. \quad (1.48)$$

Ahora bien,

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n| |b|}. \quad (1.49)$$

Por el Lema 1.1 existe un natural n_1 tal que $|b_n| > \frac{|b|}{2}$ para $n \geq n_1$. Por otra parte, para cada $\varepsilon > 0$ de $\mathbb{K}$ existe un natural n_2 tal que

$$|b_n - b| < \frac{|b|^2 \varepsilon}{2} \quad \text{para } n \geq n_2. \quad (1.50)$$

Por consiguiente, si $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, para $n \geq n_0$ se tiene

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n| |b|} < \frac{\frac{|b|^2 \varepsilon}{2}}{\frac{|b|}{2} \cdot |b|} = \varepsilon, \quad (1.51)$$

luego se verifica (1.47) y la demostración termina. ■

Sobre la constante $|b|^2 \varepsilon / 2$

Esta es la constante que hace abandonar a más gente del tema, así que vamos a quitarle importancia: **no hay que memorizarla**. Hay que saber de dónde sale, que es otra cosa.

Sale del borrador, como siempre. Tienes (1.49) delante y te preguntas: ¿qué necesito que sea $|b_n - b|$ para que esta fracción quede por debajo de ε ? Necesitas $|b_n - b| < \varepsilon |b_n| |b|$. Pero $|b_n|$ es una cantidad que varía con n y no puedes pedirle a la definición de límite una cota que dependa de n —vuelve a la lectura de dependencias si esto

no te suena—. Así que sustituyes $|b_n|$ por la cota inferior que te da el lema, $|b|/2$, y obtienes

$$\varepsilon \cdot \frac{|b|}{2} \cdot |b| = \frac{|b|^2 \varepsilon}{2},$$

que ya es una constante legítima: depende solo de ε y de b , no de n .

Este apartado es de los que hay que *entender*, no reproducir. En un examen se te puede pedir la reducción (1.48) y el papel del lema; que recuerdes el exponente exacto es irrelevante.

Firma de dependencias del teorema

Como práctica, escribamos explícitamente de qué depende cada cantidad que ha aparecido:

$$n_1 = n_1(\varepsilon), \quad n_2 = n_2(\varepsilon), \quad n_0 = \max\{n_1, n_2\} \text{ depende solo de } \varepsilon.$$

La cota de (a_n) es **uniforme en** n . La constante $|b|^2/2$ depende de b , no de n .

Ninguna cantidad depende de n . Si al reproducir la demostración te sale un objeto con subíndice n donde debería haber una constante, has cometido el error de *dependencia falsa* y la demostración no vale.

1.3.4 La letra pequeña: cuatro recíprocos falsos

El Teorema 1.1 dice que si las dos sucesiones convergen, entonces la suma, el producto y el cociente convergen a lo esperado. La tentación es leerlo al revés. Vamos a matar esa tentación con contraejemplos, uno por uno.

Todos usan las mismas dos sucesiones. Conviene tenerlas presentes:

$$a_n = \begin{cases} -1 & n \text{ impar} \\ 1 & n \text{ par} \end{cases} \quad b_n = \begin{cases} 1 & n \text{ impar} \\ -1 & n \text{ par} \end{cases} \quad (1.52)$$

Ninguna de las dos tiene límite: la demostración es la de la Sección 1.2, palabra por palabra.

Ejemplo 1.11 — La suma puede converger sin que converjan los sumandos

Con las sucesiones (1.52), la sucesión $(a_n + b_n)$ es constantemente cero, luego

$$\lim_n (a_n + b_n) = 0 \quad (1.53)$$

mientras que no existen $\lim_n a_n$ ni $\lim_n b_n$.

Ejemplo 1.12 — El producto puede converger sin que converjan los factores

Con las mismas dos sucesiones, $a_n b_n = -1$ para todo n , luego $\lim_n a_n b_n = -1$, y de nuevo ninguno de los dos factores converge.

Ejemplo 1.13 — El producto puede converger con un factor convergente y otro no

Sea (a_n) la sucesión constantemente cero y (b_n) la de (1.52). Entonces $\lim_n a_n = 0$, no existe $\lim_n b_n$, y sin embargo $a_n b_n = 0$ para todo n , luego $\lim_n a_n b_n = 0$.

Y ahora el caso interesante, que es el que *no* tiene contraejemplo.

Proposición 1.13 — Para la suma sí hay resultado positivo

Si existe $\lim_n a_n$ y no existe $\lim_n b_n$, entonces **no existe** $\lim_n (a_n + b_n)$.

Demostración. Si existiera $\lim_n (a_n + b_n)$, entonces, por el apartado (2) del Teorema 1.1 aplicado a las sucesiones $(a_n + b_n)$ y (a_n) —ambas convergentes por hipótesis—, existiría

$$\lim_n (a_n + b_n - a_n) = \lim_n b_n, \quad (1.54)$$

en contra de la hipótesis. ■

La asimetría entre la suma y el producto

Compara el Ejemplo 1.13 con la Proposición 1.13. Son la misma situación —un término converge, el otro no— y sin embargo:

Suma: la suma *no puede* converger.

Producto: el producto *sí puede* converger.

¿Por qué? Porque el argumento (1.54) consiste en *despejar* b_n , y para despejar hace falta invertir la operación. En la suma siempre se puede: restar a_n es legítimo pase lo que pase. En el producto habría que dividir por a_n , y si algún a_n vale cero eso es imposible. El Ejemplo 1.13 explota precisamente ese hueco: toma $a_n \equiv 0$, que aniquila cualquier cosa que multiplique.

La lección de fondo va más allá del tema: **lo que hace funcionar un argumento es la existencia del inverso, no la analogía formal entre $+$ y $\cdot$** . Cada vez que traslades un razonamiento de la suma al producto, pregúntate si estás dividiendo por algo que podría ser cero.

Resumen de lo que NO es cierto

Cuatro afirmaciones falsas y su asesino. Memoriza los asesinos, no las afirmaciones:

Creencia falsa	Contraejemplo
Si existe $\lim(a_n + b_n)$, existen $\lim a_n$ y $\lim b_n$	(1.52)
Si existe $\lim a_n b_n$, existen ambos	(1.52)
Si existe $\lim a_n$ y existe $\lim a_n b_n$, existe $\lim b_n$	$a_n \equiv 0$, b_n alternada
Si existe $\lim a_n$ y no existe $\lim b_n$, puede existir $\lim(a_n + b_n)$	ninguno: es falsa la creencia de que es posible

La cuarta fila es la joya: es la única de las cuatro donde hay teorema, y distinguirla de las otras tres es exactamente el tipo de pregunta que aparece en un examen tipo test.

Transversalidad

- El Teorema 1.1 tiene un gemelo literal en el Tema 5, con $x \rightarrow a$ en lugar de $n \rightarrow \infty$: el álgebra de límites de funciones. La demostración es la misma cambiando n_0 por δ .
- El término puente (1.44) reaparece en §4.3 de este tema (al probar que el producto de clases no depende de los representantes) y en el Tema 7, como regla de derivación del producto.
- El Lema 1.1 tiene su análogo en §4.3, donde hace el mismo trabajo —separar del cero— para poder definir el inverso en el cuerpo que construiremos.
- Los contraejemplos de este bloque son las entradas A3 del catálogo que iremos formando.

Lo esencial de este bloque

1. **Separación del cero:** si $\lim b_n = b \neq 0$, entonces $|b_n| > |b|/2$ desde un término en adelante. Existe para que el cociente pueda siquiera escribirse.
2. **Álgebra de límites:** suma, diferencia y producto sin hipótesis extra; cociente con $b_n \neq 0$ para todo n y $b \neq 0$.
3. **Término puente:** $a_n b_n - ab = a_n(b_n - b) + b(a_n - a)$. Convierte un salto que cambia dos factores a la vez en dos saltos que cambian uno cada uno.
4. El producto usa que *convergente* $\Rightarrow$ *acotada*. No es un adorno del bloque anterior.
5. Los recíprocos son **falsos**, con una excepción: si uno converge y el otro no, la suma no converge. El producto sí puede.
6. La constante del cociente es material de comprensión, no de memoria.

Píldora de estudio

1. Calcula $\lim_n \frac{2n+3}{n^2+n+1}$ y $\lim_n \frac{3n^5-n^2+3}{2n^5+n+1}$ dividiendo numerador y denominador por la potencia dominante. Es aplicación directa del teorema y conviene hacerlo hasta que salga solo.
2. Escribe la demostración del apartado (1) tapando el libro. Si te sale, tienes instalados los movimientos de la Sección 1.2.
3. Vuelve a (1.44) y comprueba que con el puente ab_n en lugar de $a_n b$ la demostración también funciona. ¿Qué sucesión hay que acotar en ese caso?

4. Para cada uno de los cuatro recíprocos falsos, tapa la columna derecha de la tabla e intenta reconstruir el contraejemplo. Los tres primeros salen de la misma pareja de sucesiones.