

1.4 Desigualdades, sucesiones de Cauchy y el agujero de $\mathbb{Q}$

Esquema del bloque

1. Qué sobrevive al paso al límite y qué no. La regla del emparedado.
2. **Sucesiones de Cauchy**: un criterio de convergencia que no menciona el límite.
3. Sus propiedades, y por qué toda convergente es de Cauchy *en cualquier cuerpo*.
4. **El agujero**: una sucesión de Cauchy de racionales que no converge en $\mathbb{Q}$.
5. Cuerpos completos. Y $\mathbb{Q}$ no lo es.

Objetivos de aprendizaje

Al terminar esta sección debes ser capaz de:

1. Enunciar con precisión qué desigualdades se conservan al pasar al límite y cuáles no, con contraejemplo.
2. Escribir la definición de sucesión de Cauchy y explicar en una frase en qué se diferencia de la convergencia.
3. Demostrar que la sucesión armónica no es de Cauchy.
4. Contar en sesenta segundos, sin notas, por qué $\mathbb{Q}$ no es completo.
5. Reproducir la demostración de que toda sucesión convergente es de Cauchy.

1.4.1 Qué sobrevive al paso al límite

Proposición 1.14 — Conservación del signo

Si (a_n) es una sucesión de elementos de un cuerpo ordenado $\mathbb{K}$ tal que $a_n \geq 0$ para todo n y $\lim_n a_n = a$, entonces $a \geq 0$.

Demostración. Por reducción al absurdo. Si fuese $a < 0$, el número $-a$ sería positivo y podríamos tomarlo como ε : existiría un natural n_0 tal que $|a_n - a| < -a$ para $n \geq n_0$ y, por tanto,

$$a_n = a_n - a + a \leq |a_n - a| + a < -a + a = 0 \quad (1.55)$$

para todo $n \geq n_0$, lo que contradice la hipótesis de que $a_n \geq 0$ para todo n . ■

Corolario 1.1 — Paso al límite en desigualdades

Si $b \leq a_n \leq c$ para todo n y $\lim_n a_n = a$, entonces $b \leq a \leq c$.

Demostración. Basta aplicar la Proposición 1.14 a las sucesiones $(a_n - b)$ y $(c - a_n)$, que tienen todos sus términos ≥ 0 , y tener en cuenta que el límite de la diferencia de dos sucesiones convergentes es la diferencia de los límites. ■

Lo estricto no sobrevive

Este es el punto más fino del tema y conviene detenerse. La Proposición 1.14 lleva $\geq$ en la hipótesis y en la conclusión. ¿No sería más natural con $>$?

No, porque sería **falsa**:

$$a_n = \frac{1}{n} > 0 \quad \text{para todo } n, \quad \text{y sin embargo} \quad \lim_n a_n = 0. \quad (1.56)$$

Todos los términos son estrictamente positivos y el límite no lo es.

El paso al límite erosiona las desigualdades estrictas. La razón es geométrica: el límite es un punto de contacto, y el contacto es compatible con la igualdad aunque ningún término la alcance. Lo que se conserva es $\geq$; lo que se pierde es $>$.

Guarda esto: es una de las tres o cuatro preguntas que caen con más frecuencia, y el error de contestar «sí, $a > 0$ » es casi universal la primera vez.

Cómo auditar un enunciado

Acabas de ver una técnica que vale para todo el curso. Ante un enunciado del que dudas, no intentes demostrarlo ni recordarlo: **intenta romperlo**. Cambia $\geq$ por $>$, quita una hipótesis, invierte la implicación, y busca el monstruo. Si aparece, ya sabes que el enunciado original era el bueno. Si no aparece después de un rato buscando, probablemente haya teorema.

Es más rápido que consultar los apuntes y, sobre todo, es lo único que funciona en un examen.

La regla del emparedado

El Corolario 1.1 tiene una versión mucho más útil, en la que las cotas no son constantes sino que se mueven. Es la herramienta de cálculo de límites más usada del curso.

Proposición 1.15 — Regla del emparedado

Sean (a_n) , (b_n) y (c_n) tres sucesiones de elementos de un cuerpo ordenado $\mathbb{K}$ tales que

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \text{para todo } n, \quad \lim_n a_n = a = \lim_n c_n. \quad (1.57)$$

Entonces también $\lim_n b_n = a$.

Demostración. Por hipótesis, $\lim_n (c_n - a_n) = a - a = 0$, luego para cada $\varepsilon > 0$ de $\mathbb{K}$ existe un natural n_0 tal que

$$|c_n - a_n| < \varepsilon \quad \text{para } n \geq n_0. \quad (1.58)$$

Entonces, para $n \geq n_0$, y usando que $a_n \leq b_n \leq c_n$,

$$|b_n - a_n| = b_n - a_n \leq c_n - a_n = |c_n - a_n| < \varepsilon, \quad (1.59)$$

luego $\lim_n (b_n - a_n) = 0$ y, por consiguiente,

$$\lim_n b_n = \lim_n (b_n - a_n + a_n) = \lim_n (b_n - a_n) + \lim_n a_n = a. \quad (1.60)$$

■

Por qué se llama así

La sucesión (b_n) queda aprisionada entre dos que van al mismo sitio, y no le queda más remedio que acompañarlas. Lo notable es que **no hace falta saber nada sobre (b_n)** : puede ser tan fea como se quiera, con tal de que esté encerrada.

Ahí está su utilidad práctica. Cuando un límite se resiste al cálculo directo, la estrategia es acotarlo groseramente por arriba y por abajo con dos sucesiones manejables. La aspereza de la cota no importa; importa que las dos cotas converjan al mismo sitio.

1.4.2 Sucesiones de Cauchy

Pregunta que nos guía

Para usar la definición de límite hay que conocer el candidato: sin saber quién es a , no puedes escribir $|a_n - a|$. ¿Se puede saber que una sucesión converge sin saber a qué converge?

La pregunta no es ociosa. Piensa en la sucesión 3; 3,1; 3,14; 3,141; ... Cualquiera diría que converge, y sin embargo el candidato es precisamente lo que no sabemos escribir. Hace falta un criterio que mire *solo a los términos*.

Definición 1.8 — Sucesión de Cauchy

Se dice que una sucesión (a_n) de elementos de un cuerpo ordenado $\mathbb{K}$ es una **sucesión de Cauchy** cuando para cada $\varepsilon > 0$ de $\mathbb{K}$ existe un número natural n_0 tal que

$$|a_p - a_q| < \varepsilon \quad (1.61)$$

cualesquiera que sean $p, q \geq n_0$.

Un criterio interno

Compara las dos definiciones:

Convergente: $|a_n - a| < \varepsilon$ — habla de *la sucesión y un punto externo*.

De Cauchy: $|a_p - a_q| < \varepsilon$ — habla *solo de la sucesión*.

En la Definición 1.8 no aparece ningún límite. Es **verificable sin conocer el candidato**: basta mirar cómo se apiñan los términos entre sí. Esa es toda la diferencia, y es enorme. Y ahora la lectura de dependencias, que aquí es especialmente importante:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall p, q \geq n_0 : |a_p - a_q| < \varepsilon. \quad (1.62)$$

Los índices p y q están cuantificados **independientemente**. No son «un término y el siguiente»: son *dos términos avanzados cualesquiera*, tan lejos el uno del otro como se quiera. Retén esto, porque el apartado siguiente vive de ello.

El error clásico del tema

Muchísima gente cree, la primera vez, que esto basta para ser de Cauchy:

$$\lim_n (a_{n+1} - a_n) = 0. \quad (1.63)$$

Es falso. Y el contraejemplo es una de las sucesiones más importantes de la matemática.

✎ Ejemplo 1.14 — La sucesión armónica no es de Cauchy

Sea

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}. \quad (1.64)$$

Sus términos consecutivos se juntan, pues $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$. Y sin embargo no es de Cauchy.

Demostración. Basta mirar dos índices que no sean consecutivos. Tomando $2n$ y n :

$$a_{2n} - a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}, \quad (1.65)$$

donde se ha usado que los n sumandos son todos mayores o iguales que $\frac{1}{2n}$. Luego para $\varepsilon = \frac{1}{2}$ y para todo número natural n_0 existen $p, q \geq n_0$ con $|a_p - a_q| > \varepsilon$: basta tomar $p = 2n_0$ y $q = n_0$. ■

Qué acaba de pasar

La armónica avanza a pasos cada vez más cortos —y por eso (1.63) se cumple— pero **da infinitos pasos**, y la suma de infinitos pasos cortos puede ser larga. Entre a_n y a_{2n} se recorre siempre más de $\frac{1}{2}$, por grande que sea n .

Y fíjate en dónde estaba el error: en tratar p y q como si fueran n y $n+1$, es decir, en **introducir una dependencia entre dos cantidades que la definición declara independientes**. Es el tercero de los modos de fallo que vimos en la Sección 1.2: el *colapso*.

La armónica volverá en el Tema 11, cuando probemos que la serie $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Es la misma verdad, vista once temas después.

1.4.3 Propiedades de las sucesiones de Cauchy

Proposición 1.16 — Toda sucesión de Cauchy está acotada

Si (a_n) es una sucesión de Cauchy de elementos de un cuerpo ordenado $\mathbb{K}$, entonces está acotada en $\mathbb{K}$.

Demostración. Para $\varepsilon = 1$ existe un natural n_0 tal que $|a_p - a_q| < 1$ para $p, q \geq n_0$. En particular, fijando $q = n_0$,

$$|a_p - a_{n_0}| < 1 \quad \text{para } p \geq n_0, \quad (1.66)$$

y por tanto, para $p \geq n_0$,

$$|a_p| = |a_p - a_{n_0} + a_{n_0}| \leq |a_p - a_{n_0}| + |a_{n_0}| < 1 + |a_{n_0}|. \quad (1.67)$$

Tomando $c = 1 + |a_1| + |a_2| + \dots + |a_{n_0}|$ se tiene $|a_p| \leq c$ para todo $p \in \mathbb{N}$. ■

¿Te suena?

La estructura es **idéntica** a la de «convergente $\Rightarrow$ acotada» de la Sección 1.2: tomar $\varepsilon = 1$, acotar la cola, sumar la cabeza finita. La única diferencia es que allí el punto de referencia era el límite a , y aquí, como no hay límite disponible, se usa un término de la propia sucesión, a_{n_0} .

Ese es un buen test de si has instalado el patrón: *¿podrías haber escrito esta demostración tú solo, copiando la anterior?* Si la respuesta es sí, vas bien.

Proposición 1.17 — Estabilidad

Si (a_n) y (b_n) son sucesiones de Cauchy, entonces $(a_n + b_n)$ y $(a_n b_n)$ también lo son.

Demostración. Para la **suma**, se reparte ε en mitades exactamente como en la Sección 1.3: si $|a_p - a_q| < \frac{\varepsilon}{2}$ para $p, q \geq n_1$ y $|b_p - b_q| < \frac{\varepsilon}{2}$ para $p, q \geq n_2$, entonces para $p, q \geq \max\{n_1, n_2\}$,

$$|a_p + b_p - (a_q + b_q)| \leq |a_p - a_q| + |b_p - b_q| < \varepsilon. \quad (1.68)$$

Para el **producto**, ambas están acotadas por la Proposición 1.16: existen $c_1, c_2 > 0$ con $|a_n| < c_1$ y $|b_n| < c_2$ para todo n . Elegimos ahora

$$|a_p - a_q| < \frac{\varepsilon}{2c_2} \quad \text{para } p, q \geq n_1, \quad |b_p - b_q| < \frac{\varepsilon}{2c_1} \quad \text{para } p, q \geq n_2, \quad (1.69)$$

y con el término puente, para $p, q \geq \max\{n_1, n_2\}$,

$$|a_p b_p - a_q b_q| \leq |a_p| |b_p - b_q| + |a_p - a_q| |b_q| < c_1 \cdot \frac{\varepsilon}{2c_1} + \frac{\varepsilon}{2c_2} \cdot c_2 = \varepsilon. \quad (1.70)$$

■

El reparto va cruzado

Mira con cuidado (1.69): a la diferencia de los a se le exige $\frac{\varepsilon}{2c_2}$, con la cota de la otra sucesión. No es una errata. En (1.70) cada diferencia acaba multiplicada por la cota del otro factor, y el cruce es lo que hace que ambos sumandos salgan $\frac{\varepsilon}{2}$. Es el error más frecuente al reproducir esta demostración de memoria. Si te sale c_1 dividiendo donde debería ir c_2 , las cuentas no cierran.

Proposición 1.18 — Toda convergente es de Cauchy

En todo cuerpo ordenado $\mathbb{K}$, toda sucesión convergente es una sucesión de Cauchy.

Demostración. Si $\lim_n a_n = a$, para cada $\varepsilon > 0$ de $\mathbb{K}$ existe un natural n_0 tal que $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $n \geq n_0$. Entonces, para $p \geq n_0$ y $q \geq n_0$,

$$|a_p - a_q| \leq |a_p - a| + |a_q - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad (1.71)$$

luego (a_n) es de Cauchy en $\mathbb{K}$. ■

La mitad fácil y la mitad cara

Tres líneas. Y observa que la demostración **no usa ninguna hipótesis sobre $\mathbb{K}$** : vale en cualquier cuerpo ordenado, sin excepción.

La implicación convergente $\Rightarrow$ de Cauchy es gratis y universal.

La recíproca es otra historia, y es todo el resto del tema.

El truco de la demostración merece señalarse: como no podemos comparar a_p con a_q directamente, los comparamos a los dos con a . El límite hace de intermediario. Es el término puente otra vez, en su versión aditiva.

1.4.4 El agujero

Y llegamos a la pregunta que da sentido al tema entero: ¿es cierto el recíproco? Si una sucesión se apiña consigo misma, ¿tiene que estar apiñándose *alrededor de algo*?

La respuesta es que no. Y el contraejemplo es el episodio más importante del curso.

Ejemplo 1.15 — Una sucesión de Cauchy de racionales que no converge en $\mathbb{Q}$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea m_n el mayor número natural cuyo cuadrado es menor o igual que 2^{2n+1} , y definamos

$$a_n = \frac{m_n}{2^n}. \quad (1.72)$$

Antes de la demostración: ¿qué es esta sucesión?

La definición (1.72) es opaca al leerla. Calculémosla:

n	2^{2n+1}	m_n	a_n	a_n^2
1	8	2	1	1,000000
2	32	5	$5/4 = 1,250000$	1,562500
3	128	11	$11/8 = 1,375000$	1,890625
4	512	22	$11/8 = 1,375000$	1,890625
5	2048	45	$45/32 = 1,406250$	1,977539
6	8192	90	$45/32 = 1,406250$	1,977539
7	32768	181	$181/128 = 1,414063$	1,999573

Ahora se ve: a_n es la **aproximación de $\sqrt{2}$ por defecto con n cifras binarias**. Los cuadrados suben hacia 2 sin alcanzarlo nunca.

Dos observaciones que conviene hacer aquí:

- La sucesión **se queda quieta a ratos** ($a_3 = a_4$, $a_5 = a_6$). Por eso la monotonía se enuncia con $\leq$ y no con $<$.
- Todos los a_n son racionales, por construcción: son cocientes de enteros. *No estamos usando $\sqrt{2}$ en ningún momento.*

Demostración. Por ser m_n el mayor natural con $m_n^2 \leq 2^{2n+1}$, se tiene $(m_n+1)^2 > 2^{2n+1}$. Dividiendo ambas desigualdades por 2^{2n} :

$$a_n^2 = \frac{m_n^2}{2^{2n}} \leq \frac{2^{2n+1}}{2^{2n}} = 2, \quad \left(a_n + \frac{1}{2^n}\right)^2 = \frac{(m_n+1)^2}{2^{2n}} > 2, \quad (1.73)$$

es decir,

$$a_n^2 \leq 2 < \left(a_n + \frac{1}{2^n}\right)^2 \quad \text{para todo } n. \quad (1.74)$$

Monotonía. Como $(2m_n)^2 \leq 2^{2(n+1)+1}$ y m_{n+1} es el mayor natural con esa propiedad, resulta $2m_n \leq m_{n+1}$ y por tanto $a_n \leq a_{n+1}$, luego $a_n \leq a_m$ para $m \geq n$.

Es de Cauchy. De (1.74) aplicada a dos índices y de que los términos son positivos se sigue $a_m < a_n + \frac{1}{2^n}$ para todo par m, n . Junto con la monotonía, para $m \geq n$:

$$a_n \leq a_m < a_n + \frac{1}{2^n}, \quad (1.75)$$

de donde, para $p, q \geq n$,

$$|a_p - a_q| < \frac{1}{2^n}. \quad (1.76)$$

Y como para cada $\varepsilon > 0$ de $\mathbb{Q}$ existe un natural n con $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$, la sucesión es de Cauchy en $\mathbb{Q}$.

No converge en $\mathbb{Q}$. Si existiera $a \in \mathbb{Q}$ con $\lim_n a_n = a$, por el álgebra de límites sería $\lim_n a_n^2 = a^2$ y también $\lim_n (a_n + \frac{1}{2^n})^2 = a^2$. Pasando al límite en (1.74) mediante el Corolario 1.1, resultaría

$$a^2 \leq 2 \leq a^2, \quad (1.77)$$

es decir, $a^2 = 2$. Y sabemos que no existe ningún número racional cuyo cuadrado sea 2. ■

La disciplina que hay que notar

Lee otra vez la demostración y comprueba una cosa: **en ningún momento se ha usado $\sqrt{2}$** . No podríamos: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ y estamos trabajando dentro de $\mathbb{Q}$. Lo único que se ha usado es que *no hay ningún racional de cuadrado 2*, que es un hecho sobre $\mathbb{Q}$ y se demuestra con aritmética elemental.

Que notes esa disciplina vale más que la construcción en sí. Es la misma que gobierna todo el tema: nada de lo que todavía no existe.

Y observa dónde se cobra el Corolario 1.1: aquella proposición sobre desigualdades, que parecía menor, es la que remata el argumento central del tema en (1.77).

Qué hay que llevarse de aquí

No memorices la construcción. En serio: no cae en el examen y no la vas a usar nunca. Lo que sí tienes que saber contar, en un minuto y sin notas, es esto:

En $\mathbb{Q}$ hay sucesiones que apuntan a un sitio donde no hay nadie.

Los términos se apiñan cada vez más —son de Cauchy, eso es verificable mirándolos— pero el punto al que se apiñan sencillamente no está en $\mathbb{Q}$. Hay un agujero. Se llama $\sqrt{2}$, y hay infinitos más.

Todo lo que queda del tema consiste en tapar esos agujeros.

1.4.5 Cuerpos completos

Definición 1.9 — Cuerpo completo

Se dice que un cuerpo ordenado $\mathbb{K}$ es un **cuerpo completo** cuando toda sucesión de Cauchy de elementos de $\mathbb{K}$ es convergente en $\mathbb{K}$.

Y por el Ejemplo 1.15:

El cuerpo ordenado $\mathbb{Q}$ de los números racionales no es completo.

El esqueleto del tema, en tres líneas

Convergente: propiedad **externa** — menciona un punto que puede no existir.

De Cauchy: propiedad **interna** — verificable mirando solo los términos.

Completo: el cuerpo donde ambas **coinciden**.

Una implicación es gratis (Proposición 1.18). La otra es una propiedad del cuerpo, no de la sucesión, y es la que separa $\mathbb{Q}$ de lo que construiremos.

Transversalidad

La completitud es **el único hecho no algebraico de toda la asignatura**. Todo lo demás cuelga de ella:

COMPLETITUD ($\equiv$ axioma del supremo, Tema 2)

- Bolzano–Weierstrass, Heine–Borel (Tema 4)
- Weierstrass, Bolzano, valores intermedios (Tema 6)
- Rolle → Cauchy → Valor Medio → Taylor (Temas 8 y 9)
- criterios de convergencia de series (Temas 11 y 12)

Todavía no reconoces la mitad de esos nombres, y da igual: vuelve a este diagrama en la última semana del curso. Mientras tanto, quédate con la frase, que además es una buena heurística para atascarse menos:

Hay un solo hecho no algebraico en toda la asignatura: que $\mathbb{R}$ no tiene agujeros.

Cuando un ejercicio se resista, la pregunta útil casi siempre es «¿dónde entra aquí la completitud?».

Lo esencial de este bloque

1. Al pasar al límite se conserva $\geq$ pero **no** $>$. Contraejemplo: $\frac{1}{n} > 0$ con límite 0.
2. **Emparedado**: si $a_n \leq b_n \leq c_n$ y las dos exteriores van a a , la de en medio también.
3. (a_n) es de **Cauchy** cuando $|a_p - a_q| < \varepsilon$ para $p, q \geq n_0$. No menciona el límite: es un criterio interno.
4. p y q son **independientes**. Que los términos consecutivos se junten no basta: la armónica cumple $a_{n+1} - a_n \rightarrow 0$ y verifica $a_{2n} - a_n > \frac{1}{2}$.
5. Toda Cauchy está acotada; suma y producto de Cauchy son de Cauchy; toda convergente es de Cauchy *en cualquier cuerpo ordenado*.
6. **El recíproco falla en $\mathbb{Q}$** : la sucesión $(\frac{m_n}{2^n})$ es de Cauchy y no converge, porque su límite tendría cuadrado 2.
7. $\mathbb{K}$ es **completo** cuando toda Cauchy converge. $\mathbb{Q}$ no lo es.

 Píldora de estudio

1. Demuestra que si $a_n \leq b_n$ para todo n y ambas convergen, entonces $\lim a_n \leq \lim b_n$. ¿Se puede poner $<$ en la conclusión si la hipótesis lleva $<$?
2. Reproduce la demostración de la armónica sin mirar. Es la más rentable del bloque: entra en examen y desmonta el error más común del tema.
3. Programa en Python la sucesión $(\frac{m_n}{2^n})$ y amplía la tabla hasta $n = 15$. Comprueba que a_n^2 se acerca a 2 y que la sucesión se queda quieta exactamente cuando $2m_n = m_{n+1}$.
4. Escribe la firma de dependencias de la definición de Cauchy. ¿De qué depende n_0 ? ¿De qué *no* pueden depender p y q ?