

1.5 La construcción de $\mathbb{R}$

Cómo leer este bloque

Antes de nada, un aviso que va en serio y que conviene que respetes.

Esta sección ocupa el 25 % de las páginas del tema y vale aproximadamente el 5 % del examen. **Se lee con lápiz y no se memoriza ni una demostración.** Ninguna.

No es que sea prescindible: es la razón de que el resto del curso exista. Pero el objetivo aquí no es que sepas reproducir nada, sino que puedas contar en cinco minutos, sin notas, *cómo* se construye $\mathbb{R}$ y *por qué* la construcción no es circular. Nada más.

El error de gestión más común del tema es dedicarle el doble de tiempo del que merece por puro sentido del deber, y llegar agotado a la Sección 1.2, que es lo que de verdad se cobra. Si vas mal de tiempo, este es el bloque que se sacrifica.

Léela como leerías el código fuente de una librería que llevas usando desde los quince años: con curiosidad, entendiendo las decisiones de diseño, sin aprenderte una sola línea.

Esquema del bloque

1. La idea: qué es un número real.
2. El material de construcción: $\mathcal{C}$, $\mathcal{N}$ y una relación de equivalencia.
3. **El motor**: la proposición que hace funcionar todo lo demás.
4. Las operaciones, y el concepto de *buena definición*.
5. El orden, y $\mathbb{Q}$ metido dentro de $\mathbb{R}$.
6. El teorema final: $\mathbb{R}$ es completo.

Objetivos de aprendizaje

Al terminar esta sección debes ser capaz de:

1. Explicar, en cinco minutos y sin notas, cómo se construye $\mathbb{R}$ a partir de $\mathbb{Q}$.
2. Responder a la objeción «¿no estáis usando $\mathbb{R}$ para construir $\mathbb{R}$?».
3. Explicar qué significa que una definición sobre clases de equivalencia sea **consistente**, y por qué hay que demostrarlo.
4. Decir para qué sirve la Proposición 1.20.

Ni un objetivo pide reproducir una demostración. No es un descuido.

1.5.1 La idea

Tenemos un problema y una pista.

El problema: en $\mathbb{Q}$ hay sucesiones de Cauchy que apuntan a un sitio donde no hay nadie. Queremos un cuerpo donde eso no pase.

La pista: aunque el punto de destino no exista, **la sucesión sí existe**. La sucesión $(\frac{m_n}{2^n})$ del bloque anterior es un objeto perfectamente definido dentro de $\mathbb{Q}$. Lo que no existe es su límite.

La idea de la construcción es entonces de una audacia notable:

Qué es un número real

Si el punto de destino no existe, **lo fabricamos a partir de las sucesiones que apuntan a él**.

Un número real *será* el conjunto de todas las sucesiones de Cauchy de racionales que lo aproximan. No una de ellas: todas a la vez, agrupadas.

Así, $\sqrt{2}$ no será un punto misterioso al que nadie llega, sino el conjunto formado por $(\frac{m_n}{2^n})$, por $(1; 1,4; 1,41; 1,414; \dots)$, y por todas las demás sucesiones racionales que se apiñan en el mismo sitio.

¿No es esto circular?

Es la objeción número uno, y hay que responderla antes de seguir: *¿no estamos usando $\mathbb{R}$ para construir $\mathbb{R}$?*

No. Comprueba, a lo largo de todo el bloque, que:

- todas las sucesiones son **de números racionales**;
- todos los ε que aparecen son **números racionales**;
- todas las cuentas ocurren dentro de $\mathbb{Q}$.

El único material de construcción es $\mathbb{Q}$ y la noción de sucesión de Cauchy *en* $\mathbb{Q}$, que definimos en la Sección 1.4 sin mencionar $\mathbb{R}$ ni una vez. Es una construcción honesta. Si en algún punto ves un ε real colándose, es que hay un error. No lo hay, pero merece la pena que lo vigiles: esa vigilancia es la mitad del valor de leer esta sección.

1.5.2 El material

Definición 1.10 — Los dos conjuntos y la relación

Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de las sucesiones de Cauchy de números racionales, y sea $\mathcal{N}$ el conjunto de las sucesiones de números racionales con límite cero.

En $\mathcal{C}$ se define la relación

$$(a_n) \sim (b_n) \quad \text{cuando} \quad (a_n - b_n) \in \mathcal{N}. \quad (1.78)$$

Como toda sucesión convergente es de Cauchy (proposición del bloque anterior), $\mathcal{N}$ es un subconjunto de $\mathcal{C}$. Esto no es un detalle: es lo que hace que el cociente tenga sentido.

Aviso de notación

$\mathcal{N}$ (sucesiones nulas) y $\mathbb{N}$ (los naturales) se parecen peligrosamente en la pizarra. Aquí van tipográficamente distintos, pero cuando tomes apuntes conviene que elijas un signo inequívoco para cada uno.

Proposición 1.19 — $\sim$ es una relación de equivalencia

La relación definida en (1.78) es reflexiva, simétrica y transitiva.

Demostración. *Reflexiva:* $(a_n - a_n)$ es la sucesión nula, luego está en $\mathcal{N}$.

Simétrica: si $\lim_n (a_n - b_n) = 0$ entonces $\lim_n (b_n - a_n) = -\lim_n (a_n - b_n) = 0$.

Transitiva: si $\lim_n (a_n - b_n) = 0 = \lim_n (b_n - c_n)$, entonces por el álgebra de límites

$$\lim_n (a_n - c_n) = \lim_n (a_n - b_n) + \lim_n (b_n - c_n) = 0. \quad (1.79)$$

■

Definición 1.11 — El conjunto $\mathbb{R}$

$\mathbb{R} = \mathcal{C} / \sim$, el conjunto de las clases de equivalencia. Sus elementos se designan por letras griegas $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, y se escribe $\alpha = [(a_n)]$ para indicar que la sucesión de Cauchy de racionales (a_n) es un **representante** de la clase α .

Para quien programa

La analogía es exacta y ayuda:

$\mathcal{C}$: el conjunto de las *implementaciones*.

$\sim$: la relación «dan el mismo resultado observable».

$\mathbb{R}$: el *tipo abstracto*.

$[(a_n)]$: el valor, visto a través de la interfaz.

Trabajar con clases de equivalencia es programar contra la interfaz y no contra la implementación. Y de ahí sale, exactamente igual que en programación, la obligación que domina el resto del bloque: **cada vez que definamos una operación eligiendo un representante, habrá que comprobar que el resultado no depende de la elección.**

Si has visto $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Esta construcción es la misma maniobra que ya conoces del álgebra: tomar un conjunto, definir en él una relación de equivalencia y quedarse con las clases. Si tienes fresca la construcción de $\mathbb{Q}$ a partir de $\mathbb{Z}$ —pares (m, n) módulo la relación $mq = np$ — estás en casa. Si no, este es el momento de repasarla: quince minutos allí ahorran una hora aquí.

1.5.3 El motor

Antes de definir nada hace falta una proposición técnica. Es la pieza de la que cuelga todo lo demás, y por eso le damos nombre propio.

Proposición 1.20 — Proposición motor

Si $(a_n) \in \mathcal{C} - \mathcal{N}$, entonces existen un número racional $\varepsilon_0 > 0$ y un número natural n_0 tales que

o bien $a_n > \varepsilon_0$ para todo $n \geq n_0$, *o bien* $a_n < -\varepsilon_0$ para todo $n \geq n_0$.

Demostración. Por hipótesis (a_n) no tiene límite cero, luego existe un racional $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para todo natural n , se puede encontrar otro natural m con $|a_m| > 2\varepsilon_0$.

Por ser (a_n) de Cauchy, existe n_0 tal que $|a_n - a_m| < \varepsilon_0$ para $n, m \geq n_0$, es decir,

$$a_m - \varepsilon_0 < a_n < a_m + \varepsilon_0 \quad \text{para } n, m \geq n_0. \quad (1.80)$$

Elijamos ahora $m \geq n_0$ con $|a_m| > 2\varepsilon_0$. Entonces, o bien $a_m > 2\varepsilon_0$, o bien $a_m < -2\varepsilon_0$. En el primer caso, para $n \geq n_0$,

$$a_n > a_m - \varepsilon_0 > 2\varepsilon_0 - \varepsilon_0 = \varepsilon_0; \quad (1.81)$$

en el segundo,

$$a_n < a_m + \varepsilon_0 < -2\varepsilon_0 + \varepsilon_0 = -\varepsilon_0. \quad (1.82)$$

■

Para qué sirve el motor

En cuanto una sucesión de Cauchy *no* es nula, sus términos acaban despegándose del cero **y quedándose todos del mismo lado**. Dos consecuencias, y son las dos que necesitamos:

Separación del cero. $a_n \neq 0$ desde n_0 en adelante, luego existe a_n^{-1} . Sin esto no hay *inverso* en $\mathbb{R}$.

Signo constante. La dicotomía «o todos por encima de ε_0 , o todos por debajo de $-\varepsilon_0$ » es literalmente la tricotomía del orden. Sin esto no hay *orden* en $\mathbb{R}$.

Es el mismo movimiento del lema de separación del cero de la Sección 1.3, en versión para clases. Cuando lo veas invocado más abajo, reconócelo.

1.5.4 Las operaciones

Definición 1.12 — Suma en $\mathbb{R}$

Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con representantes (a_n) y (b_n) ,

$$\alpha + \beta = [(a_n + b_n)]. \quad (1.83)$$

Definir así una operación exige comprobar **dos** cosas distintas, y conviene separarlas porque se confunden:

1. *Clausura*: que $(a_n + b_n)$ sea efectivamente una sucesión de Cauchy, para que $[(a_n + b_n)]$ designe algo. Lo probamos en la Sección 1.4.
2. *Independencia del representante*: que el resultado no cambie si elegimos otros representantes.

Demostración. Veamos la segunda. Sean (a'_n) y (b'_n) otros representantes, es decir, $(a_n) \sim (a'_n)$ y $(b_n) \sim (b'_n)$. Por hipótesis $\lim_n (a_n - a'_n) = 0 = \lim_n (b_n - b'_n)$, luego

$$\lim_n (a_n + b_n - (a'_n + b'_n)) = \lim_n (a_n - a'_n) + \lim_n (b_n - b'_n) = 0, \quad (1.84)$$

o sea $(a_n + b_n) \sim (a'_n + b'_n)$. La suma está, pues, bien definida. ■

Buena definición: la lección transferible de este bloque

Si de toda §4.3 te llevas una sola cosa, que sea esta:

Cuando defines algo sobre clases eligiendo un representante, estás obligado a demostrar que el resultado no depende de la elección.

Es un concepto nuevo para ti y no es una formalidad: sin esa comprobación, (1.83) no define ninguna operación, porque dos personas con representantes distintos obtendrían resultados distintos y ambas tendrían razón.

Lo verás repetido cuatro veces en este bloque —suma, producto, inverso, orden— y lo volverás a ver cada vez que en tu vida matemática aparezca un cociente. Merece la pena entenderlo bien aquí, donde el ejemplo es sencillo.

Con esto, $\mathbb{R}$ es un grupo aditivo abeliano: la asociatividad y la conmutatividad se heredan término a término, el neutro es $0 = [(0)]$ (la clase de la sucesión constantemente cero) y el opuesto de $[(a_n)]$ es $[(-a_n)]$.

Definición 1.13 — Producto en $\mathbb{R}$

Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con representantes (a_n) y (b_n) ,

$$\alpha\beta = [(a_n b_n)]. \quad (1.85)$$

Demostración. La clausura la vimos en la Sección 1.4. Para la independencia del representante, la clave es —otra vez— el **término puente**:

$$a_n b_n - a'_n b'_n = (a_n - a'_n) b_n + a'_n (b_n - b'_n). \quad (1.86)$$

Las sucesiones (b_n) y (a'_n) están acotadas por ser de Cauchy, y $(a_n - a'_n)$ y $(b_n - b'_n)$ tienen límite cero. Como acotada por infinitésimo da infinitésimo, ambos sumandos de (1.86) tienden a cero, luego $\lim_n (a_n b_n - a'_n b'_n) = 0$. ■

Tercera aparición del puente

Cuéntalas: en el álgebra de límites (Sección 1.3), en el producto de sucesiones de Cauchy (Sección 1.4) y aquí. Es la misma identidad las tres veces, y aún reaparecerá en el Tema 7. Cuando una técnica vuelve cuatro veces en un curso, deja de ser un truco y pasa a ser una herramienta que conviene tener afilada.

El inverso

Aquí es donde el motor se cobra. Si $[(a_n)] \neq 0$, entonces $(a_n) \in \mathcal{C} - \mathcal{N}$ y la Proposición 1.20 da un racional $\varepsilon_0 > 0$ y un natural n_0 con $|a_n| > \varepsilon_0$ para $n \geq n_0$. En particular $a_n \neq 0$ y existe a_n^{-1} de ahí en adelante. Se define entonces

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n < n_0, \\ a_n^{-1} & \text{si } n \geq n_0, \end{cases} \quad (1.87)$$

y se comprueba que (b_n) es de Cauchy —usando $|b_p - b_q| = \frac{|a_p - a_q|}{|a_p||a_q|} < \frac{|a_p - a_q|}{\varepsilon_0^2}$ — y que $[(a_n)][(b_n)] = [(1)]$, porque $a_n b_n - 1 = 0$ para todo $n \geq n_0$.

«¿Puedo definir una sucesión a trozos?»

Sí. Una sucesión es *cualquier* aplicación $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$, sin ningún requisito de regularidad. La definición (1.87) es perfectamente legítima.

Y hay una razón profunda por la que funciona: los $n_0 - 1$ primeros términos son una **cabeza finita**, y una cabeza finita es *invisible* para la clase de equivalencia, porque no afecta al límite de la diferencia. Podríamos haber puesto cualquier cosa en ellos —ceros, unos, números al azar— y la clase $[(b_n)]$ sería la misma.

Reconoce el patrón: cabeza finita más cola infinita, por tercera vez en el tema.

Con el inverso, $\mathbb{R} - \{0\}$ es un grupo multiplicativo abeliano, y como el producto distribuye sobre la suma (se hereda término a término), queda:

Teorema 1.2 — $\mathbb{R}$ es un cuerpo

El conjunto $\mathbb{R}$ con las operaciones (1.83) y (1.85) es un cuerpo.

1.5.5 El orden

Definición 1.14 — Elemento positivo

Se dice que $\alpha = [(a_n)] \in \mathbb{R}$ es **positivo** cuando existen un número racional $\varepsilon_0 > 0$ y un natural n_0 tales que

$$a_n > \varepsilon_0 \quad \text{para todo } n \geq n_0. \quad (1.88)$$

Se designa por $\mathbb{R}^+$ el conjunto de los elementos positivos.

Obsérvese que *no* se define «positivo» como « $a_n > 0$ para todo n »: eso dependería del representante. Se exige un margen ε_0 fijo, y ese margen es justo lo que hace que la definición sobreviva al cambio de representante: si (a'_n) es otro, existe $m_0 \geq n_0$ con $|a_n - a'_n| < \varepsilon_0/2$ para $n \geq m_0$, y entonces

$$a'_n = a_n - (a_n - a'_n) \geq a_n - |a_n - a'_n| > \varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_0}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2}. \quad (1.89)$$

Teorema 1.3 — $\mathbb{R}$ es un cuerpo ordenado

Se verifican: $0 \notin \mathbb{R}^+$; para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ una y sólo una de las tres propiedades $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $\alpha = 0$, $-\alpha \in \mathbb{R}^+$; y $\mathbb{R}^+$ es cerrado para la suma y el producto.

De dónde sale la tricotomía

Directamente del motor. Si $\alpha \neq 0$, su representante está en $\mathcal{C} - \mathcal{N}$, y la Proposición 1.20 dice que o bien $a_n > \varepsilon_0$ —y entonces $\alpha \in \mathbb{R}^+$ — o bien $a_n < -\varepsilon_0$ —y entonces $-\alpha \in \mathbb{R}^+$. La dicotomía del motor es la tricotomía del orden.

Y fíjate en el patrón general, que ya se ha repetido cuatro veces: **para dar una estructura al cociente, se da en los representantes y se comprueba la independencia.**

1.5.6 $\mathbb{Q}$ dentro de $\mathbb{R}$

Hemos construido un cuerpo ordenado nuevo. Falta comprobar que contiene al viejo.

Proposición 1.21 — Inmersión de $\mathbb{Q}$

Existe un subcuerpo $\mathbb{R}_0 \subset \mathbb{R}$ y una aplicación biyectiva $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}_0$ tal que, para todo par de racionales a y b :

$$f(a+b) = f(a) + f(b), \quad f(ab) = f(a)f(b), \quad a < b \Rightarrow f(a) < f(b). \quad (1.90)$$

La aplicación es la más natural posible: $f(a) = [(a)]$, la clase de la sucesión *constante* igual a a . La inyectividad sale de que si $[(a)] = [(b)]$ entonces la sucesión constante $(a-b)$ tiene límite cero, luego $a = b$.

La identificación, y su abuso de notación

A partir de aquí se escribe a tanto para el racional a como para la clase $[(a)]$. No es que sean el mismo objeto —viven en conjuntos distintos— sino que el isomorfismo permite tratarlos como si lo fueran sin que nada se rompa.

Es un abuso de notación estándar y conviene explicitarlo una vez, porque estas identificaciones silenciosas son una fuente clásica de desconcierto. En el Tema 2 verás la misma maniobra al identificar $\mathbb{Q}$ con el cuerpo de los elementos racionales de un cuerpo ordenado cualquiera.

1.5.7 El teorema final

Quedan dos resultados auxiliares y el teorema.

Proposición 1.22 — Densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$

Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\alpha < \beta$, existe $c \in \mathbb{Q}$ con $\alpha < c < \beta$.

Proposición 1.23 — Las Cauchy racionales ya convergen

Toda sucesión (a_n) de Cauchy en $\mathbb{Q}$ es convergente en $\mathbb{R}$, y su límite es precisamente el elemento $\alpha = [(a_n)]$.

Esta segunda proposición es la que justifica retroactivamente toda la construcción: **la sucesión converge a su propia clase**. El agujero que encontramos en la Sección 1.4 ya está tapado, y está tapado por definición.

Teorema 1.4 — $\mathbb{R}$ es un cuerpo completo

Toda sucesión de Cauchy de elementos de $\mathbb{R}$ es convergente en $\mathbb{R}$.

La arquitectura de la demostración

No reproducimos los detalles. Lo que sí conviene retener es la **estrategia**, porque es un patrón general que reaparece en toda la matemática posterior:

1. **Bajar.** Dada una sucesión de Cauchy (α_n) de *reales*, se usa la densidad para elegir, para cada n , un *racional* a_n con $\alpha_n < a_n < \alpha_n + \frac{1}{n}$. La sucesión de racionales (a_n) sigue de cerca a la de reales.
2. **Resolver abajo.** Se comprueba que (a_n) es de Cauchy en $\mathbb{Q}$, repartiendo el error en tercios: uno para $|a_n - \alpha_n|$, otro para $|\alpha_n - \alpha_m|$, otro para $|\alpha_m - a_m|$.
3. **Subir.** Por la Proposición 1.23, (a_n) converge en $\mathbb{R}$ a $\alpha = [(a_n)]$. Y como (α_n) va pegada a (a_n) , también $\lim_n \alpha_n = \alpha$.

En una frase: *aproximar para bajar a un terreno conocido, resolver allí, y subir el resultado*. Se llama **extender por densidad** y lo volverás a usar muchas veces.

Transversalidad

La construcción está terminada, pero le falta una pieza que **no** está en este tema y sin la cual queda coja.

Acabamos de fabricar *un* cuerpo ordenado completo. ¿Y si alguien construye otro por un camino distinto —por ejemplo, con cortaduras en lugar de sucesiones— y le sale otra cosa? ¿Cuál de los dos sería «los números reales»?

La respuesta está en el Tema 2: **dos cuerpos ordenados arquimedianos y completos son isomorfos**. Es decir, da igual el camino; se llega siempre al mismo sitio salvo cambio de nombre. Solo entonces está justificado hablar de *el* cuerpo de los números reales, y solo entonces tiene sentido axiomatizarlo en lugar de construirlo, que es lo que hará el Tema 2 y lo que harás tú durante el resto de tu vida matemática.

Dicho de otro modo: este bloque demuestra que $\mathbb{R}$ *existe*; el Tema 2 demuestra que es *único*. Las dos mitades hacen falta.

Lo esencial de este bloque

Lo que hay que saber contar, sin notas:

1. Un número real **es** una clase de sucesiones de Cauchy de racionales, agrupadas por la relación «su diferencia tiende a cero».
2. La construcción **no es circular**: todo ocurre dentro de $\mathbb{Q}$, y todos los ε son racionales.
3. Las operaciones se definen **sobre representantes**, y cada vez hay que comprobar que el resultado no depende del representante elegido. Eso es la *buena definición*, y es la lección transferible del bloque.
4. La **proposición motor** —una Cauchy no nula acaba despegándose del cero con signo constante— es lo que produce el inverso y el orden.
5. $\mathbb{Q}$ se mete dentro de $\mathbb{R}$ vía sucesiones constantes, y a partir de ahí se identifican.
6. $\mathbb{R}$ es completo. Toda Cauchy de racionales converge a su propia clase; para las Cauchy de reales, se baja a $\mathbb{Q}$ por densidad, se resuelve y se sube.
7. Falta la unicidad, y llega en el Tema 2.

Píldora de estudio

1. Cierra el libro y cuéntale a alguien —o a la pared— cómo se construye $\mathbb{R}$, en cinco minutos. Si te atascas, lo que falta no es memoria: es haber entendido la idea del punto 1 del resumen.
2. Repasa la construcción de $\mathbb{Q}$ a partir de $\mathbb{Z}$ y localiza en ella las mismas cuatro piezas: conjunto de partida, relación de equivalencia, operaciones sobre representantes, comprobación de consistencia.

3. Recorre el bloque con un lápiz buscando un ε que no sea racional. No lo hay; el ejercicio consiste en convencerte.
4. **No** hagas fichas de estas demostraciones. Ese tiempo rinde diez veces más en la Sección [1.2](#).