
Topología · Tema 1.1

Espacios topológicos

Documento formativo · Curso 2026/27

Academia Colonia del Retiro

Grado en Matemáticas — UNED

Índice general

1.1 Espacios topológicos	1
Presentación del tema	1
1.1 Bases de entornos abiertos en los puntos de un conjunto	5
1.2 Conjuntos abiertos. Topología en un conjunto	12
1.3 Bases de entornos abiertos equivalentes	16
1.4 Propiedades de una topología	19
1.5 Espacio topológico	24
1.6 Conjuntos cerrados en una topología	27
Síntesis del tema	30
Banco de ejercicios	33

Tema 1.1

Espacios topológicos

Presentación del tema

Pregunta que nos guía

¿Qué es lo mínimo que hay que saber de un conjunto para poder decir que una sucesión «se acerca» a un punto, o que una función «conserva la cercanía», sin disponer de una distancia?

En Análisis has trabajado siempre con la distancia $|x - y|$ o con la euclídea de $\mathbb{R}^n$. Pero si repasas las definiciones de límite y de continuidad, verás que la distancia solo aparece a través de unos conjuntos muy concretos: los intervalos $(p - \varepsilon, p + \varepsilon)$, o las bolas. Este tema da el paso decisivo de la Topología: **olvidar la distancia y quedarse solo con esos conjuntos**, exigiéndoles las propiedades mínimas que hacen que todo funcione.

El tema hace ese trabajo dos veces. Primero, **localmente**: en cada punto se da una familia de conjuntos que hacen de «intervalos alrededor del punto» (1.1). Después, **globalmente**: con esas familias se definen los conjuntos abiertos (1.2) y se demuestra que son lo mismo dicho de otra manera (1.4). Al final del recorrido tendrás la definición moderna de topología, la de cualquier libro actual, y sabrás de dónde sale.

Lo que tienes que llevarte de este tema

1. Una topología es la estructura **mínima** que permite hablar de proximidad, y por tanto de límite y de continuidad, sin distancia.
2. Se puede dar de dos maneras equivalentes: **localmente**, con una base de entornos abiertos en cada punto (axiomas B1-B3), o **globalmente**, con la familia de los abiertos (axiomas P1-P3). Son dos presentaciones de una misma estructura.
3. Casi todo se decide **punto a punto** con un único patrón lógico: *para cada punto existe un básico dentro*. Quien domina ese patrón y su negación domina el tema.

Objetivos de aprendizaje

Al terminar el tema deberás ser capaz de:

- 01.** Enunciar con precisión las definiciones de sistema de bases de entornos abiertos, abierto, topología, sistemas equivalentes, finura y cerrado.
- 02.** Verificar si una colección de familias es un sistema de bases, tanto en un conjunto finito como en $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ o un espacio métrico.
- 03.** Decidir si un conjunto es abierto o cerrado en una topología dada y justificar las respuestas negativas con un punto testigo.
- 04.** Demostrar las Proposiciones centrales del tema: los básicos son abiertos, P1-P3, su recíproco, el criterio de equivalencia y las propiedades de los cerrados.
- 05.** Explicar qué papel juega cada axioma B1, B2, B3 y dar un contraejemplo para cada uno.
- 06.** Comparar topologías por finura y distinguir topología métrica de metrizable.
- 07.** Construir topologías con propiedades dadas y contraejemplos con familias infinitas.

Cómo leer este documento

Cada tipo de contenido va en una caja con **color, ícono y nombre propios**. El color nunca es el único portador del significado: el nombre de la caja siempre aparece escrito.

Caja	Para qué sirve
 Definición	El enunciado exacto que hay que saber reproducir.
 Proposición, Lema, Corolario, Teorema	Resultados demostrados. La demostración va a continuación, con una barra gris a la izquierda.
 Ejemplo	Casos en los que un concepto se aplica y se calcula.
 Contraejemplo	Casos que muestran que una hipótesis es necesaria o que una afirmación es falsa.
 Motivación	De dónde sale un concepto y qué problema resuelve.
 Voz docente	Comentarios de pizarra: intuición, lectura de las fórmulas, avisos de tono informal.
 Punto crítico	Una dificultad típica concreta y cómo superarla.
 Cómo abordarlo	Métodos de trabajo reutilizables.
 Ampliación	Contenido fuera de temario, para quien quiera ir más allá.
 Laboratorio	Casos de ejemplo que usaremos repetidamente.

Convenciones y notación

- **Inclusión.** Escribimos $A \subseteq B$ para la inclusión no estricta. El libro usa el símbolo $\subset$ con este mismo sentido; cuando leas el original, tenlo en cuenta.
- **Naturales.** $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, como en el libro.
- **Numeración.** Las secciones §1.1–§1.6 coinciden con las del libro. Las cajas tienen numeración propia; la referencia al libro aparece en gris, como en  Libro: Def. 1, y la tabla de correspondencias está más abajo.
- **Notación.** $\mathcal{P}(X)$ es el conjunto de partes de X ; $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}(p)\}_{p \in X}$, un sistema de bases; $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, la topología que determina; $\mathcal{T}(p) = \{U \in \mathcal{T} : p \in U\}$; $\mathcal{T}_u$, la topología usual de $\mathbb{R}$; $\mathcal{T}_S$, la topología de Sorgenfrey (1.1); $E(p, r)$, la bola abierta de centro p y radio r .

Mapa del tema

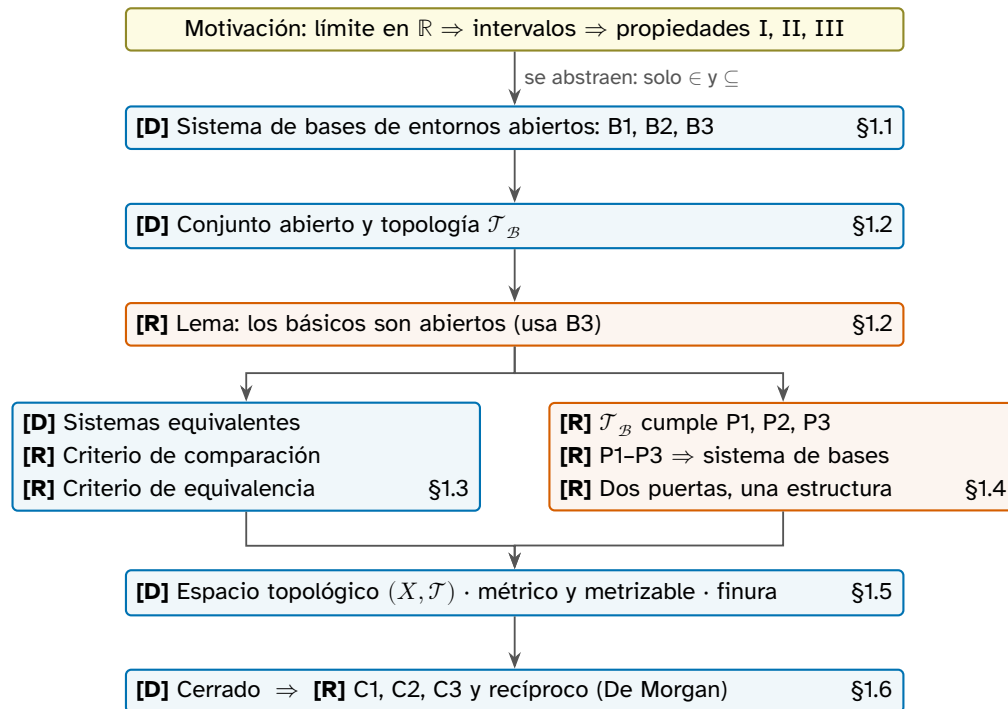


Figura 1.1.1: Mapa de dependencias del tema. [D] marca definiciones y [R] resultados.

El mapa tiene tres tramos. El de **construcción** va de la definición de sistema de bases a la topología $\mathcal{T}_B$. El de **equivalencia** (§1.4) es el corazón del tema: demuestra que dar un sistema de bases y dar una familia con P1-P3 es lo mismo. El de **uso** (§1.5 y §1.6) trabaja ya con la topología directamente. El Lema de §1.2 es la bisagra: sin él no funcionan ni el criterio de §1.3 ni la segunda mitad de §1.4.

Hilo conductor: dos laboratorios

Un mismo escenario que reaparece en cada sección cansa menos que diez ejemplos sueltos. Usaremos dos «laboratorios» a lo largo de todo el tema; en cada sección volveremos a ellos con la herramienta nueva.

Laboratorio F (finito)

El conjunto $X = \{a, b, c, d\}$ con las familias

$$\mathcal{B}(a) = \{\{a\}, \{a, b\}\}, \quad \mathcal{B}(b) = \{\{a, b\}\}, \quad \mathcal{B}(c) = \{\{c, d\}, \{a, c, d\}\}, \quad \mathcal{B}(d) = \{\{c, d\}\}.$$

Es el Ejemplo 1 del libro. Al ser finito, todo se puede comprobar a mano y sin trampa.

Laboratorio R (cuatro topologías en la misma recta)

El conjunto $\mathbb{R}$ con cuatro sistemas de bases: $\{\mathbb{R}\}$, $\{(p - \varepsilon, p + \varepsilon)\}_{\varepsilon > 0}$, $\{[p, p + \varepsilon)\}_{\varepsilon > 0}$ y $\{\{p\}\}$. Darán lugar a cuatro topologías encadenadas,

$$\{\emptyset, \mathbb{R}\} \subsetneq \mathcal{T}_u \subsetneq \mathcal{T}_s \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}),$$

que demostraremos en §1.5. Mismo conjunto, cuatro maneras de entender «estar cerca».

Correspondencia con el libro

Si tienes el libro oficial, aquí tienes las correspondencias con los resultados de este documento.

Libro	Este documento	Comentario
Def. 1 · Ejemplos 1, 2, 3	Def. 1.1.1 · Ej. 1.1.1, Prop. 1.1.1, Ej. 1.1.3	El Ejemplo 2 pasa a proposición con demostración
Defs. 2, 3 · Observación	Defs. 1.1.3, 1.1.4 · Lema 1.1.1	La Observación pasa a lema
Ejemplos 4, 5, 6	Ej. 1.1.8, Ej. 1.1.6, Contraej. 1.1.4	
Def. 4 · criterio · Ejemplo 7	Def. 1.1.5 · Prop. 1.1.2, Cor. 1.1.1 · Ej. 1.1.12	El criterio se demuestra
Prop. 1 · Ejemplo 8 · Prop. 2	Prop. 1.1.3 · Ej. 1.1.15 · Prop. 1.1.4	Se añade el Teorema 1.1.1
Def. 5 · Def. 6	Def. 1.1.8 · Def. 1.1.9	
Def. 7 · Ejemplos 9, 10 · Prop. 3	Def. 1.1.10 · Ej. 1.1.17 · Prop. 1.1.7	La Prop. 3 se demuestra entera
Autocomprobación 1–5	Ejercicios 1.1.1–1.1.5	Con ampliaciones
Actividades 1–3	Ejercicios 1.1.6–1.1.8	La 1 con datos nuevos

1.1 Bases de entornos abiertos en los puntos de un conjunto

Objetivos de aprendizaje

- O1.1.** Enunciar la definición de sistema de bases de entornos abiertos, **incluida** la condición $\mathcal{B}(p) \neq \emptyset$, distinguiendo punto, conjunto, familia y sistema.
- O1.2.** Verificar B1–B3 de forma exhaustiva en un conjunto finito y, en un espacio métrico, con el argumento del radio sobrante.
- O1.3.** Distinguir los axiomas locales (B1, B2) del axioma de coherencia (B3).
- O1.4.** Construir sistemas que fallen exactamente uno de los tres axiomas.

De la distancia a la proximidad

💡 Motivación

Recuerda la definición de límite: p es límite de la sucesión (a_n) de números reales si para cada $\varepsilon > 0$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $|p - a_n| < \varepsilon$ para todo $n \geq m$. Como $|p - a_n| < \varepsilon$ significa exactamente $a_n \in (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$, si llamamos

$$\mathcal{B}(p) = \{(p - \varepsilon, p + \varepsilon)\}_{\varepsilon > 0}$$

la definición se reescribe así:

$$a_n \rightarrow p \iff \forall U \in \mathcal{B}(p) \exists m \in \mathbb{N} \forall n \geq m : a_n \in U.$$

La distancia ha desaparecido de la fórmula: solo queda la familia $\mathcal{B}(p)$. Si conoces las familias $\mathcal{B}(p)$, sabes qué sucesiones convergen y a dónde, sin volver a mirar la distancia. Lo mismo ocurre con la continuidad: f es continua en p si para cada intervalo $V \in \mathcal{B}(f(p))$ hay un intervalo $U \in \mathcal{B}(p)$ con $f(U) \subseteq V$.

Las familias $\mathcal{B}(p)$ de $\mathbb{R}$ cumplen tres propiedades:

- I.** Cada p pertenece a todos los intervalos de $\mathcal{B}(p)$.
- II.** Dados dos intervalos $(p - \varepsilon, p + \varepsilon)$ y $(p - \varepsilon', p + \varepsilon')$ de $\mathcal{B}(p)$, su intersección contiene algún intervalo $(p - \delta, p + \delta)$ de $\mathcal{B}(p)$: basta $\delta = \min\{\varepsilon, \varepsilon'\}$.
- III.** Si $q \in (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$, existe un intervalo $(q - \delta, q + \delta)$ de $\mathcal{B}(q)$ contenido en $(p - \varepsilon, p + \varepsilon)$: basta $\delta = \varepsilon - |p - q|$.

🗣️ Voz docente

Fíjate en el lenguaje de I–III: solo aparecen *pertenece* ($\in$) y *está contenido* ($\subseteq$). La distancia se ha usado para *comprobarlas*, pero no para *enunciarlas*. Por eso se pueden exigir en cualquier conjunto. No leas I–III como curiosidades sobre intervalos: en el resto del tema no se van a demostrar, se van a **exigir**. Son los axiomas.

La definición

Definición 1.1.1 — Sistema de bases de entornos abiertos

Sea X un conjunto no vacío y, para cada punto $p \in X$, sea $\mathcal{B}(p)$ una familia **no vacía** de subconjuntos de X . Se dice que $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}(p)\}_{p \in X}$ es un **sistema de bases de entornos abiertos** de X , y que cada $\mathcal{B}(p)$ es una **base de entornos abiertos** de p , si se cumplen:

(B1) Si $U \in \mathcal{B}(p)$, entonces $p \in U$.

(B2) Si $U, V \in \mathcal{B}(p)$, existe $W \in \mathcal{B}(p)$ tal que $W \subseteq U \cap V$.

(B3) Si $U \in \mathcal{B}(p)$ y $q \in U$, existe $V \in \mathcal{B}(q)$ tal que $V \subseteq U$.

Los elementos de $\mathcal{B}(p)$ se llaman **básicos** de p .

Libro: Def. I.1

Cuatro niveles de objeto

Casi todos los errores de escritura de este tema son errores de «tipo». Antes de escribir $\in$ o $\subseteq$, comprueba qué hay a cada lado.

Objeto	Tipo	Ejemplo en $\mathbb{R}$
Conjunto	X	$\mathbb{R}$
Punto	$p \in X$	$p = 0$
Subconjunto	$U \subseteq X$, es decir, $U \in \mathcal{P}(X)$	$U = (-1, 1)$
Familia de conjuntos	$\mathcal{B}(p) \subseteq \mathcal{P}(X)$	$\mathcal{B}(0) = \{(-\varepsilon, \varepsilon)\}_{\varepsilon > 0}$
Sistema	aplicación $p \mapsto \mathcal{B}(p)$	la que da $\mathcal{B}(p)$ para cada $p \in \mathbb{R}$

Así, « $U \in \mathcal{B}(p)$ » y « $p \in U$ » son correctas, pero « $U \subseteq \mathcal{B}(p)$ » o « $p \subseteq U$ » no tienen sentido.

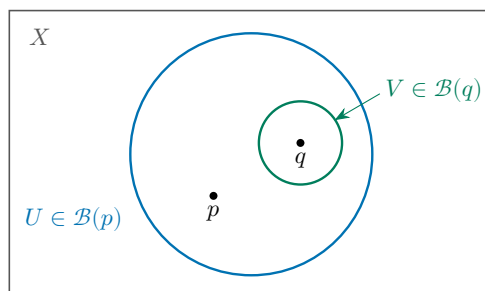


Figura 1.1.2: Axioma B3: si q está en un básico U de p , algún básico V de q cabe dentro de U .

Voz docente

Los axiomas B1 y B2 hablan de entornos abiertos de **un solo punto**: B1 dice que los básicos de p rodean a p ; B2, que dos básicos de p siempre se pueden «afinar» a uno más pequeño. En cambio B3 es el único axioma que **relaciona puntos distintos**: si q está cerca de p (está en un básico U de p), entonces U contiene un básico de q .

El axioma B3 es el que hace que las familias $\mathcal{B}(p)$ formen un *sistema* coherente y no una colección de familias sueltas.

⚠ Punto crítico: B3 tiene cuatro cuantificadores

Escrito entero, B3 dice

$$\forall p \in X \quad \forall U \in \mathcal{B}(p) \quad \forall q \in U \quad \exists V \in \mathcal{B}(q) : V \subseteq U.$$

Dos errores típicos: comprobarlo solo para $q = p$ (que es trivial, basta $V = U$) y elegir V antes que q . El básico V **depende** de p , de U y de q . En un conjunto finito hay que recorrer *todas* las ternas (p, U, q) .

⚠ Punto crítico: B2 no pide que la intersección sea un básico

B2 exige que $U \cap V$ **contenga** un básico, no que **sea** un básico. En $\mathbb{R}^2$, la familia formada por todos los discos abiertos y todos los cuadrados abiertos centrados en p cumple B2, aunque la intersección de un disco y un cuadrado no es ni disco ni cuadrado: contiene un disco más pequeño, y eso basta.

Primeros ejemplos

✏ Ejemplo 1.1.1 — Laboratorio F: verificación de los axiomas

Sea $X = \{a, b, c, d\}$ con $\mathcal{B}(a) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$, $\mathcal{B}(b) = \{\{a, b\}\}$, $\mathcal{B}(c) = \{\{c, d\}, \{a, c, d\}\}$ y $\mathcal{B}(d) = \{\{c, d\}\}$.

B1. Basta mirar: cada básico contiene a su punto.

B2. El sistema $\mathcal{B}(a)$ solo permite intersecciones

$$\{a\} \cap \{a\} = \{a\} \in \mathcal{B}(a)$$

$$\{a\} \cap \{a, b\} = \{a\} \in \mathcal{B}(a)$$

$$\{a, b\} \cap \{a, b\} = \{a, b\} \in \mathcal{B}(a)$$

mientras que $\mathcal{B}(c)$:

$$\{c, d\} \cap \{c, d\} = \{c, d\} \in \mathcal{B}(c)$$

$$\{c, d\} \cap \{a, c, d\} = \{c, d\} \in \mathcal{B}(c)$$

$$\{a, c, d\} \cap \{a, c, d\} = \{a, c, d\} \in \mathcal{B}(c)$$

Para $\mathcal{B}(b)$ basta comprobar:

$$\{a, b\} \cap \{a, b\} = \{a, b\} \in \mathcal{B}(b)$$

mientras que para $\mathcal{B}(d)$ basta:

$$\{c, d\} \cap \{c, d\} = \{c, d\} \in \mathcal{B}(d)$$

B3. Hay que recorrer las ternas (p, U, q) con p tomando valores en $\{a, b, c, d\}$ y con $U \in \mathcal{B}(p)$ y $q \in U$, y encontrar en cada caso un $V \in \mathcal{B}(q)$ con $V \subseteq U$; en la siguiente tabla vemos que hay 12 casos que analizar:

p	$U \in \mathcal{B}(p)$	$q \in U$	V	p	$U \in \mathcal{B}(p)$	$q \in U$	V
a	$\{a\}$	a	$\{a\}$	c	$\{c, d\}$	d	$\{c, d\}$
a	$\{a, b\}$	a	$\{a\}$	c	$\{a, c, d\}$	a	$\{a\}$
a	$\{a, b\}$	b	$\{a, b\}$	c	$\{a, c, d\}$	c	$\{c, d\}$
b	$\{a, b\}$	a	$\{a\}$	c	$\{a, c, d\}$	d	$\{c, d\}$
b	$\{a, b\}$	b	$\{a, b\}$	d	$\{c, d\}$	c	$\{c, d\}$
c	$\{c, d\}$	c	$\{c, d\}$	d	$\{c, d\}$	d	$\{c, d\}$

Todas las ternas verifican la condición B3. Por tanto $\{\mathcal{B}(a), \mathcal{B}(b), \mathcal{B}(c), \mathcal{B}(d)\}$ es un sistema de bases de entornos abiertos.

📖 Libro: Ejemplo I.1

Voz docente

Dos observaciones que puede que usemos más adelante.

- Primera: b no tiene ningún básico «pequeño»; lo más cerca que se puede estar de b es $\{a, b\}$, así que *estar cerca de b obliga a estar cerca de a* .
- Segunda: El conjunto básico $\{a, b\} \in \mathcal{B}(a)$ contienen otro básico $\{a\} \in \mathcal{B}(a)$ del mismo punto. Para el uso que haremos de los sistemas de bases veremos que un básico $\{a, b\}$ con esta propiedad podría eliminarse del sistema sin dejar de ser sistema de base de entornos abiertos y que sea «equivalente». En la Sección 1.3 veremos que se pueden quitar sin cambiar nada.
Ocurre lo mismo con $\{a, c, d\} \in \mathcal{B}(c)$.

El ejemplo más importante de todos es el de los espacios métricos, del que salen $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ y todos los ejemplos del Análisis.

Definición 1.1.2 — Distancia, espacio métrico y bola abierta

Una **distancia** en un conjunto X es una aplicación $d: X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ tal que, para todos $x, y, z \in X$:

(d1) $d(x, y) = 0 \iff x = y$;

(d2) $d(x, y) = d(y, x)$ (simetría);

(d3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (desigualdad triangular).

Al par (X, d) se le llama **espacio métrico**. La **bola abierta** de centro p y radio $r > 0$ es el conjunto:

$$E(p, r) = \{t \in X : d(p, t) < r\}$$

Observa que son todos no vacíos.

📖 Libro: Ejemplo I.2

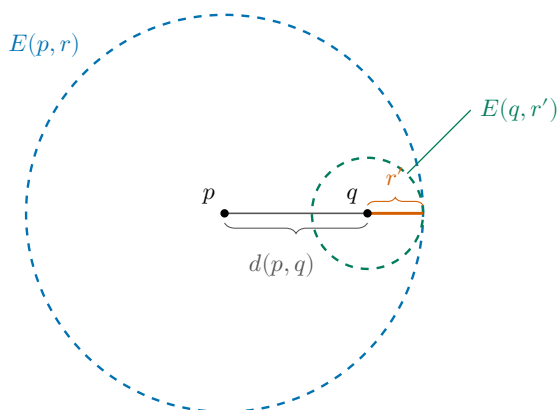


Figura 1.1.3: El radio sobrante: si $q \in E(p, r)$ y $r' = r - d(p, q)$, la bola $E(q, r')$ cabe en $E(p, r)$. Los bordes discontinuos indican que no pertenecen a la bola.

Proposición 1.1.1 — Las bolas abiertas en un espacio métrico forman un sistema de bases de entornos abiertos

En un espacio métrico (X, d) , las familias $\mathcal{B}(p) = \{E(p, r)\}_{r>0}$ forman un sistema de bases de entornos abiertos.

■ Libro: Ejemplo I.2, sin demostración

Demostración. Cada $\mathcal{B}(p)$ es no vacía (por ejemplo, $E(p, 1) \in \mathcal{B}(p)$).

B1. $d(p, p) = 0 < r$ por (d1), luego $p \in E(p, r)$ para todo $r > 0$.

B2. Dadas $E(p, r)$ y $E(p, s)$, sea $\rho = \min\{r, s\} > 0$. Si $d(p, t) < \rho$, entonces $d(p, t) < r$ y $d(p, t) < s$; luego $E(p, \rho) \subseteq E(p, r) \cap E(p, s)$.

B3. Sea $q \in E(p, r)$ y tomemos $r' = r - d(p, q)$, que es positivo porque $d(p, q) < r$. Si $x \in E(q, r')$, por (d3) y (d2),

$$d(p, x) \leq d(p, q) + d(q, x) < d(p, q) + r' = r,$$

luego $x \in E(p, r)$. Por tanto $E(q, r') \subseteq E(p, r)$. ■

Voz docente

Esta demostración es la plantilla de todo lo métrico que vendrá: B2 se resuelve con el **mínimo** de los radios y B3 con **lo que sobra hasta el borde**, $r - d(p, q)$. Fíjate en que la desigualdad triangular se usa aquí y solo aquí: es esencial para que la distancia construya una topología. Pero nos estamos anticipando.

⚠ Punto crítico: el radio de B3

Un error frecuente es tomar $r/2$ como radio de la bola de q . Falla si q está cerca del borde: con $p = 0$, $r = 1$ y $q = 0,9$ en $\mathbb{R}$, la bola $E(q, \frac{1}{2}) = (0,4; 1,4)$ se sale de $(-1, 1)$. Otro, escribir $r - d(p, q)$ sin comprobar la inclusión. La Figura 1.1.3 y la desigualdad triangular escrita entera evitan los dos.

✏ Ejemplo 1.1.2 — La recta y el plano

Con $d(x, y) = |x - y|$, la Proposición 1.1.1 da en $\mathbb{R}$ las familias $\mathcal{B}(p) = \{(p - \varepsilon, p + \varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$ de la motivación. Con la distancia euclídea $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ da en $\mathbb{R}^2$ los discos abiertos centrados en cada punto.

Ejemplo 1.1.3 — Los números racionales

En $\mathbb{Q}$, sea $\mathcal{B}(p)$ la familia de los «intervalos de racionales» $\{x \in \mathbb{Q} : |x - p| < r\}$ con $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$. Es un sistema de bases de entornos abiertos: la demostración de la Proposición 1.1.1 funciona sin cambios, porque si p, q, r, s son racionales, también lo son $\min\{r, s\}$ y $r - |p - q|$.

 Libro: Ejemplo I.3

Ejemplo 1.1.4 — Los dos sistemas extremos

En cualquier conjunto $X \neq \emptyset$:

- $\mathcal{B}(p) = \{X\}$ para todo p . B1 y B2 son inmediatos; para B3, si $q \in X$, basta $V = X \in \mathcal{B}(q)$.
- $\mathcal{B}(p) = \{\{p\}\}$ para todo p . B1 y B2 son inmediatos; para B3, si $q \in \{p\}$, entonces $q = p$ y basta $V = \{p\}$.

En el primero todos los puntos están «igual de cerca» de todos; en el segundo, cada punto está aislado de los demás. Darán las topologías trivial y discreta de la Sección 1.5.

Ejemplo 1.1.5 — Laboratorio $\mathbb{R}$: el sistema de Sorgenfrey $\mathcal{T}_S$

En $\mathbb{R}$, sea $\mathcal{B}(p) = \{[p, p + \varepsilon)\}_{\varepsilon > 0}$: intervalos cerrados por la izquierda y abiertos por la derecha. Es un sistema de bases de entornos abiertos. **Compruébalo tú** en el Ejercicio 1.1.1 antes de seguir: la topología que determina, $\mathcal{T}_S$, se usará en las secciones siguientes.

Cuando falla un axioma

Los tres axiomas B1, B2 y B3 son **independientes**: ninguno se deduce de los otros dos. Para probarlo basta un sistema que cumpla dos y falle el tercero.

Contraejemplo 1.1.1 — Falla B1 y se cumplen B2 y B3

Sea $X = \{a, b\}$ con $\mathcal{B}(a) = \mathcal{B}(b) = \{\{b\}\}$.

Cada familia tiene un solo elemento, así que B2 se cumple con $W = U$. Para B3, el único q posible es $q = b$, y $\{b\} \in \mathcal{B}(b)$ sirve.

Pero B1 falla, ya que $a \notin \{b\}$.

Contraejemplo 1.1.2 — Falla B2 y se cumplen B1 y B3

Sea $X = \{a, b, c\}$ con $\mathcal{B}(a) = \{\{a, b\}, \{a, c\}\}$, $\mathcal{B}(b) = \{\{a, b\}\}$, $\mathcal{B}(c) = \{\{a, c\}\}$. B1 es inmediato. B3: en $\{a, b\}$, el punto a tiene el básico $\{a, b\}$ y el punto b también; en $\{a, c\}$, igual con $\{a, c\}$.

Pero B2 falla en a , ya que

$$\{a, b\} \cap \{a, c\} = \{a\}$$

y ningún básico de a cabe en $\{a\}$.

Contraejemplo 1.1.3 — Falla B3 y se cumplen B1 y B2

Sea $X = \{a, b, c\}$ con $\mathcal{B}(a) = \{\{a, b\}\}$, $\mathcal{B}(b) = \{\{b, c\}\}$, $\mathcal{B}(c) = \{\{c\}\}$.

B1 es inmediato y B2 se cumple con $W = U$. Pero B3 falla en la terna $(a, \{a, b\}, b)$: el único básico de b es $\{b, c\}$, que no está contenido en $\{a, b\}$. En $\mathbb{R}$ hay un ejemplo del mismo tipo en el Ejercicio 1.1.2.

 Voz docente

¿Qué se pierde exactamente cuando falla cada axioma? La respuesta precisa necesita la noción de abierto, así que la daremos en §1.4 (Lema 1.1.2): B2 es responsable de que las intersecciones finitas de abiertos sean abiertas, y B1 y B3 de que los básicos sean abiertos que contienen a su punto.

Lo esencial de este bloque

- Un sistema de bases asigna a cada punto una familia no vacía de conjuntos que hacen el papel de los intervalos centrados.
- B1 y B2 son locales; B3 es la condición de coherencia entre puntos.
- En un métrico: B2 con el mínimo de los radios, B3 con el radio sobrante $r - d(p, q)$.
- Los tres axiomas son independientes.