

1.2 Conjuntos abiertos. Topología en un conjunto

Objetivos de aprendizaje

- O2.1.** Decidir si un subconjunto es abierto aplicando la definición punto a punto.
- O2.2.** Demostrar que un conjunto **no** es abierto exhibiendo un único punto testigo.
- O2.3.** Demostrar que todo básico es abierto y señalar que es B3 lo que lo garantiza.
- O2.4.** Distinguir «intervalo abierto» (noción de orden) de «conjunto abierto» (noción topológica), y entender que ser abierto depende de la topología.

💡 Motivación

¿Qué tiene $(0, 1)$ que no tenga $[0, 1)$? Que en $(0, 1)$ *cada punto tiene algo de sitio alrededor sin salirse*: por cerca que esté del borde, cabe un intervalito centrado en él. En $[0, 1)$ eso falla justo en el 0. Con un sistema de bases podemos expresar esta idea sin distancia: «algo de sitio alrededor de t » significa «un básico de t ».

📖 Definición 1.1.3 — Conjunto abierto

Sea X un conjunto con un sistema de bases de entornos abiertos $\mathcal{B}$. Un subconjunto $A \subseteq X$ es **abierto** si

$$\forall t \in A \quad \exists U \in \mathcal{B}(t) : U \subseteq A.$$

📖 Libro: Def. 2

📖 Definición 1.1.4 — Topología determinada por un sistema de bases

La **topología** determinada por $\mathcal{B}$ es la familia de sus abiertos:

$$\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \{A \subseteq X : A \text{ es abierto}\}.$$

Si $\mathcal{B}$ es el sistema de bolas de un espacio métrico (Proposición 1.1.1), $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ se llama **topología métrica**. En $\mathbb{R}$ con $d(x, y) = |x - y|$ se llama **topología usual**, $\mathcal{T}_u$. 📖 Libro: Def. 3

⚠️ Punto crítico: el conjunto vacío es abierto

Un razonamiento típico: « $\emptyset$ no tiene puntos, luego no puede contener básicos, luego no es abierto». **Ese razonamiento es falso.**

La definición de conjunto abierto dice «para todo $t \in A$...», y una afirmación que empieza por «para todo» sobre un conjunto vacío es **verdadera**: no hay ningún t que la incumpla. El libro lo dice expresamente («cuando es el conjunto vacío, o bien...»), pero no hace falta: es lógica de primer curso.

Lema 1.1.1 — Los básicos son abiertos

Si $\mathcal{B}$ es un sistema de bases de entornos abiertos de X , entonces $\mathcal{B}(p) \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ para todo $p \in X$.

📖 Libro: observación tras la Def. 3

Demostración. Sea $U \in \mathcal{B}(p)$ y sea $q \in U$. Por B3 existe $V \in \mathcal{B}(q)$ con $V \subseteq U$. Como q era arbitrario, U es abierto. ■

 Voz docente

Dos líneas, y es la bisagra del tema: la usaremos en el Ejemplo 1.1.6, en el criterio de la Sección 1.3 y en la segunda mitad de la Sección 1.4. También explica el nombre: los básicos son «entornos *abiertos*» precisamente porque B3 los hace abiertos. En el Contraejemplo 1.1.3, donde falla B3, el básico $\{a, b\}$ de a **no** es abierto: el punto b no tiene ningún básico dentro.

 Cómo decidir si un conjunto es abierto

Para probar que A es abierto. Fija un $t \in A$ arbitrario y encuentra un $U \in \mathcal{B}(t)$ con $U \subseteq A$; ese U puede depender de t .

Un atajo: si A es un básico, ya es abierto por el Lema 1.1.1.

Para probar que A no es abierto. Hay que negar la definición:

$$\neg(\forall t \in A \exists U \in \mathcal{B}(t) : U \subseteq A) \iff \exists t \in A \forall U \in \mathcal{B}(t) : U \not\subseteq A.$$

Basta **un** punto testigo, pero de él se escapan **todos** sus básicos.

 Punto crítico: un básico que no cabe no prueba nada

$(0, 2)$ es abierto en $\mathcal{T}_u$, y sin embargo el básico $(1 - 2, 1 + 2)$ del punto 1 no cabe en él. Para negar que un conjunto es abierto no basta con encontrar un básico que se salga: hay que probar que se salen *todos* los básicos de algún punto.

Abiertos de la recta **Ejemplo 1.1.6 — Los intervalos abiertos acotados son abiertos**

En $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$, todo intervalo (a, b) con $a < b$ es abierto. Hay dos maneras de verlo.

- **Con el lema.** Si $t = \frac{a+b}{2}$ y $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$, entonces $(a, b) = (t - \varepsilon, t + \varepsilon) \in \mathcal{B}(t)$, y es abierto por el Lema 1.1.1.
- **Con la definición.** Si $x \in (a, b)$, sea $\varepsilon = \min\{x - a, b - x\} > 0$. Entonces $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq (a, b)$.

 Libro: Ejemplo 5

 Voz docente

Cuidado con la primera prueba. Que (a, b) sea un básico de *un* punto (su centro) solo demuestra que es abierto **gracias al lema**; la definición pide un básico dentro para *cada* punto. El libro usa el lema sin citarlo.

Y una observación sobre palabras que recoge el propio libro: en «intervalo abierto (a, b) », «abierto» se refiere al orden de $\mathbb{R}$ (no incluye los extremos). Lo que acabamos de probar es que esos intervalos son además abiertos en sentido topológico. Son dos nociones distintas que aquí coinciden.

✎ Ejemplo 1.1.7 — Las semirrectas abiertas son abiertas

$(a, +\infty)$ es abierto en $\mathcal{T}_u$: si $t > a$, con $\varepsilon = t - a$ se tiene $(t - \varepsilon, t + \varepsilon) = (a, 2t - a) \subseteq (a, +\infty)$. Análogamente, $(-\infty, a)$ es abierto.

✖ Contraejemplo 1.1.4 — Un intervalo semiabierto no es abierto en la topología usual

$[a, b)$ no es abierto en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$. El punto testigo es a : todo básico $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ contiene puntos menores que a , que no están en $[a, b)$.  Libro: Ejemplo 6

✖ Contraejemplo 1.1.5 — Los racionales no son abiertos en la recta

$\mathbb{Q}$ no es abierto en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$: cualquier racional q es testigo, porque todo intervalo $(q - \varepsilon, q + \varepsilon)$ contiene irracionales (densidad de los irracionales). Por la misma razón, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tampoco es abierto.

✎ Ejemplo 1.1.8 — La topología usual de los racionales

La topología determinada por el sistema del Ejemplo 1.1.3 es la **topología usual de $\mathbb{Q}$** . Un abierto curioso: $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$. Si $t \in A$, entonces $|t| < \sqrt{2}$; tomando un racional r con $0 < r < \sqrt{2} - |t|$, todos los racionales x con $|x - t| < r$ cumplen $|x| < \sqrt{2}$, luego están en A . Fíjate en que $A = \mathbb{Q} \cap [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$: en $\mathbb{Q}$, este conjunto «con aspecto de cerrado» es abierto. 

Libro: Ejemplo 4

De vuelta a los laboratorios

✎ Ejemplo 1.1.9 — Laboratorio F: la topología

Apliquemos la definición de abierto punto a punto. Un conjunto $A \subseteq \{a, b, c, d\}$ que contenga a...

- a : siempre tiene dentro el básico $\{a\}$; no impone condición.
- b : su único básico es $\{a, b\}$; exige $a \in A$.
- c : sus dos básicos contienen $\{c, d\}$; exige $d \in A$.
- d : su único básico es $\{c, d\}$; exige $c \in A$.

Luego A es abierto si y solo si $(b \in A \Rightarrow a \in A)$ y $(c \in A \Leftrightarrow d \in A)$. Para la parte $A \cap \{a, b\}$ hay tres opciones $(\emptyset, \{a\}, \{a, b\})$ y para $A \cap \{c, d\}$ dos $(\emptyset, \{c, d\})$:

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, X\}.$$

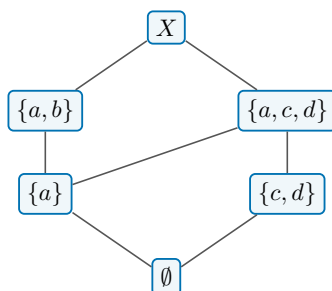


Figura 1.1.4: Laboratorio F: los seis abiertos, ordenados por inclusión (cada segmento sube de un abierto a otro que lo contiene inmediatamente).

Ejemplo 1.1.10 — Laboratorio $\mathbb{R}$: ¿es $[a, b)$ abierto?

Depende de la topología:

- Con $\mathcal{B}(p) = \{\mathbb{R}\}$ los únicos abiertos son $\emptyset$ y $\mathbb{R}$: **no**.
- En $\mathcal{T}_u$: **no** (Contraejemplo 1.1.4).
- En $\mathcal{T}_S$: **sí**. Si $x \in [a, b)$, el básico $[x, b) \in \mathcal{B}(x)$ (con $\varepsilon = b - x$) está contenido en $[a, b)$.
- Con $\mathcal{B}(p) = \{\{p\}\}$, todo conjunto es abierto: **sí**.

Ejemplo 1.1.11 — Ser abierto depende del espacio

Considera $X = [0, 1]$ con la distancia $d(x, y) = |x - y|$. La bola de centro 0 y radio $\frac{1}{2}$ es

$$E(0, \frac{1}{2}) = \{t \in [0, 1] : |t| < \frac{1}{2}\} = [0, \frac{1}{2}),$$

así que $[0, \frac{1}{2})$ es abierto en $[0, 1]$, aunque no lo sea en $\mathbb{R}$. Lo estudiarás a fondo como topología relativa en el Tema 2.2 (y lo anticipa el Ejercicio 1.1.8).

⚠ Punto crítico: «abierto» no es una propiedad absoluta

Un conjunto es abierto **en una topología** (y dentro de un conjunto X). $[a, b)$ no es abierto en $\mathcal{T}_u$, sí en $\mathcal{T}_S$; $[0, \frac{1}{2})$ no es abierto en $\mathbb{R}$, sí en $[0, 1]$. Acostúmbrate a no escribir nunca « A es abierto» sin decir en qué espacio.

Lo esencial de este bloque

- A es abierto si cada punto de A tiene un básico dentro de A ; $\emptyset$ lo es por vacuidad.
- Los básicos son abiertos, gracias a B3 (Lema 1.1.1).
- Para negar «abierto» hace falta un punto testigo del que se escapan *todos* los básicos.
- Ser abierto depende de la topología y del conjunto ambiente.