

1.3 Bases de entornos abiertos equivalentes

Objetivos de aprendizaje

- O3.1.** Enunciar y demostrar el criterio de equivalencia, señalando dónde intervienen B1 y el Lema 1.1.1.
- O3.2.** Decidir si dos sistemas son equivalentes y, si no lo son, cuál de las dos topologías contiene a la otra.
- O3.3.** Interpretar la equivalencia geoméricamente: básicos que se pueden encajar unos dentro de otros.

Pregunta que nos guía

Si en $\mathbb{R}$ usamos solo radios racionales, o si en $\mathbb{R}^2$ cambiamos los discos por cuadrados, ¿cambian los abiertos?

Definición 1.1.5 — Sistemas equivalentes

Dos sistemas de bases de entornos abiertos $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ de un mismo conjunto X son **equivalentes**, y se escribe $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}'$, si determinan la misma topología: $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \mathcal{T}_{\mathcal{B}'}$. ■ Libro: Def. 4

Voz docente

Que $\sim$ es una relación de equivalencia no requiere ninguna comprobación: es la igualdad de topologías. La pregunta interesante es cómo saber si $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \mathcal{T}_{\mathcal{B}'}$ *sin* calcular todos los abiertos. La respuesta es comparar los básicos punto a punto, y conviene hacerlo en dos mitades.

Proposición 1.1.2 — Criterio de comparación

Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ sistemas de bases de entornos abiertos de X . Entonces

$$\mathcal{T}_{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{B}'} \iff \forall p \in X \quad \forall U \in \mathcal{B}(p) \quad \exists U' \in \mathcal{B}'(p) : U' \subseteq U.$$

Demostración. ($\Leftarrow$) Sea $A \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ y sea $t \in A$. Existe $U \in \mathcal{B}(t)$ con $U \subseteq A$ y, por hipótesis, $U' \in \mathcal{B}'(t)$ con $U' \subseteq U \subseteq A$. Luego $A \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}'}$.

($\Rightarrow$) Sea $U \in \mathcal{B}(p)$. Por el Lema 1.1.1, $U \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, y por hipótesis $U \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}'}$. Además $p \in U$ por B1. Aplicando la definición de abierto de $\mathcal{T}_{\mathcal{B}'}$ a U en el punto p , existe $U' \in \mathcal{B}'(p)$ con $U' \subseteq U$. ■

Corolario 1.1.1 — Criterio de equivalencia

$\mathcal{B} \sim \mathcal{B}'$ si y solo si, para todo $p \in X$:

- (a) para cada $U \in \mathcal{B}(p)$ existe $U' \in \mathcal{B}'(p)$ con $U' \subseteq U$, y
- (b) para cada $V' \in \mathcal{B}'(p)$ existe $V \in \mathcal{B}(p)$ con $V \subseteq V'$.

■ Libro: enunciado tras la Def. 4, sin demostración

Demostración. $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \mathcal{T}_{\mathcal{B}'}$ equivale a las dos inclusiones $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{B}'}$ y $\mathcal{T}_{\mathcal{B}'} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. Por la Proposición 1.1.2, la primera equivale a (a) y la segunda, a (b). ■

Voz docente

Regla para recordarlo: *el sistema más fino mete un básico suyo dentro de cada básico del otro*. Y fíjate en qué se usa en la implicación difícil ($\Rightarrow$): que los básicos son abiertos (Lema 1.1.1, es decir, B3) y que contienen a su punto (B1). Sin esos dos axiomas, el criterio sería falso.

⚠ Punto crítico: la inclusión al revés y las mitades olvidadas

Dos errores frecuentes. Primero, escribir $U \subseteq U'$ en lugar de $U' \subseteq U$: el básico del otro sistema va **dentro**. Segundo, comprobar solo la condición (a): eso demuestra una inclusión entre topologías, no la igualdad. Las dos condiciones se exigen, además, **en todos los puntos**.

Ejemplos

✍ Ejemplo 1.1.12 — Radios racionales y radios reales

En $\mathbb{R}$ sean $\mathcal{B}(x) = \{(x-r, x+r) : r \in \mathbb{Q}, r > 0\}$ y $\mathcal{B}'(x) = \{(x-\varepsilon, x+\varepsilon) : \varepsilon > 0\}$.

(a) Cada $(x-r, x+r) \in \mathcal{B}(x)$ está también en $\mathcal{B}'(x)$: basta $U' = U$.

(b) Dado $\varepsilon > 0$, existe un racional r con $0 < r < \varepsilon$, y $(x-r, x+r) \subseteq (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$.

Por el Corolario 1.1.1, son equivalentes: los dos dan $\mathcal{T}_u$.

📖 Libro: Ejemplo 7

Voz docente

Parece un detalle técnico, pero no lo es. Con el mismo argumento, cada punto de $\mathbb{R}$ tiene una base **numerable**, $\{(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})\}_{n \geq 1}$, que da la misma topología. Esa propiedad tiene nombre propio, el *primer axioma de numerabilidad*, y la estudiarás en el Tema 1.3.

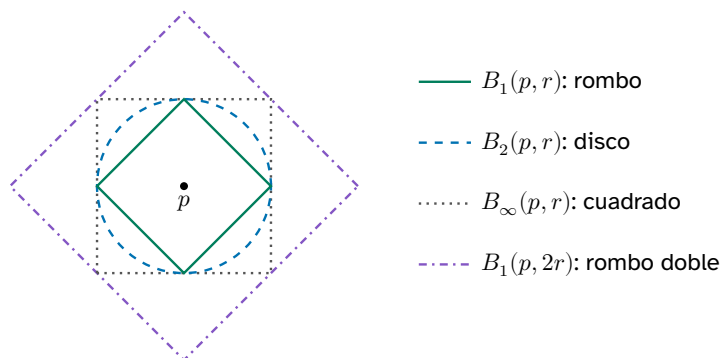


Figura 1.1.5: Rombo $\subseteq$ disco $\subseteq$ cuadrado $\subseteq$ rombo doble: bolas de d_1 , d_2 y d_∞ encajadas.

✍ Ejemplo 1.1.13 — Tres distancias en el plano, una sola topología

En $\mathbb{R}^2$, para $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$, consideremos las distancias

$$d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|, \quad d_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},$$

$$d_\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}.$$

Sus bolas son rombos, discos y cuadrados. De las desigualdades $d_\infty \leq d_2 \leq d_1 \leq 2d_\infty$ se deduce

$$B_1(p, r) \subseteq B_2(p, r) \subseteq B_\infty(p, r) \subseteq B_1(p, 2r).$$

Así, cada bola de un sistema contiene una bola de cualquiera de los otros dos con el mismo centro: un cuadrado contiene el disco de igual radio, un disco el rombo de igual radio, y un rombo de radio r contiene el cuadrado de radio $r/2$. Por el Corolario 1.1.1, los tres sistemas son equivalentes.

Voz docente

La forma de los básicos no importa; importa que se puedan encajar unos dentro de otros. Por eso decimos «la» topología usual de $\mathbb{R}^2$ aunque haya muchas distancias que la producen.

✖ Contraejemplo 1.1.6 — Usual y Sorgenfrey no son equivalentes

En $\mathbb{R}$, compara $\mathcal{B}(p) = \{(p - \varepsilon, p + \varepsilon)\}_{\varepsilon > 0}$ con el sistema de Sorgenfrey $\mathcal{B}'(p) = \{[p, p + \varepsilon)\}_{\varepsilon > 0}$.

- Todo $(p - \varepsilon, p + \varepsilon)$ contiene $[p, p + \varepsilon)$. Por la Proposición 1.1.2, $\mathcal{T}_u \subseteq \mathcal{T}_s$.
- $[p, p + 1)$ no contiene ningún $(p - \delta, p + \delta)$, porque este contiene puntos menores que p . Luego $\mathcal{T}_s \not\subseteq \mathcal{T}_u$.

Se cumple una mitad del criterio y la otra no: $\mathcal{T}_u \subsetneq \mathcal{T}_s$.

Ejemplo 1.1.14 — Laboratorio F: el sistema mínimo

En el Laboratorio F, el sistema $\mathcal{B}'(a) = \{\{a\}\}$, $\mathcal{B}'(b) = \{\{a, b\}\}$, $\mathcal{B}'(c) = \mathcal{B}'(d) = \{\{c, d\}\}$ es equivalente al del Ejemplo 1.1.1. Cada básico de $\mathcal{B}$ contiene uno de $\mathcal{B}'$ del mismo punto ($\{a, b\} \supseteq \{a\}$, $\{a, c, d\} \supseteq \{c, d\}$) y $\mathcal{B}'(p) \subseteq \mathcal{B}(p)$ para todo p . Las redundancias que señalamos en §1.1 se pueden quitar sin cambiar la topología.

Ampliación — FUERA DE TEMARIO

En un espacio con un número finito de abiertos, cada punto p tiene un **abierto mínimo**:

$$U_p = \bigcap \{U \in \mathcal{T} : p \in U\}$$

que es abierto por ser intersección finita de abiertos (§1.4). El sistema $\mathcal{B}(p) = \{U_p\}$ es el más pequeño posible en su clase de equivalencia. En el Laboratorio F, $U_a = \{a\}$, $U_b = \{a, b\}$ y $U_c = U_d = \{c, d\}$: exactamente el sistema del Ejemplo 1.1.14.

Lo esencial de este bloque

- Dos sistemas son equivalentes si determinan la misma topología.
- $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{B}'}$ si y solo si cada básico de $\mathcal{B}$ contiene un básico de $\mathcal{B}'$ del mismo punto.
- Equivalencia = comparación en los dos sentidos, en todos los puntos.
- La forma de los básicos no importa: discos, cuadrados y rombos dan la misma topología.