

1.4 Propiedades de una topología

Objetivos de aprendizaje

- O4.1.** Demostrar que los abiertos cumplen P1, P2 y P3, identificando qué hipótesis usa cada apartado.
- O4.2.** Explicar por qué P3 se limita a familias finitas y dar un contraejemplo con una familia infinita.
- O4.3.** Demostrar el recíproco: una familia con P1-P3 determina un sistema de bases cuya topología es ella misma.
- O4.4.** Explicar por qué, desde aquí, «topología» significa «familia con P1-P3».
- O4.5.** Usar la caracterización «abierto = unión de básicos».

💡 Motivación

Ya tenemos, para cada sistema de bases, su familia de abiertos $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. Dos preguntas naturales: ¿qué propiedades tiene siempre esa familia?, y ¿bastan esas propiedades para recuperar todo lo demás? La respuesta a la segunda es sí, y es la razón de que los libros actuales definan la topología directamente por sus abiertos.

Las propiedades de los abiertos

Proposición 1.1.3 — Propiedades de los abiertos

Si $\mathcal{B}$ es un sistema de bases de entornos abiertos de X , la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ cumple:

- (P1)** $\emptyset \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ y $X \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.
- (P2)** Si $\{U_{\lambda}\}_{\lambda \in L}$ es una familia cualquiera, finita o infinita, de elementos de $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, entonces $\bigcup_{\lambda \in L} U_{\lambda} \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.
- (P3)** Si $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, entonces $U_1 \cap \dots \cap U_n \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.

📖 Libro: Prop. 1

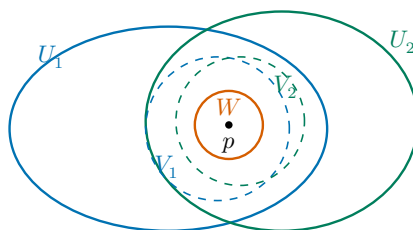


Figura 1.1.6: Demostración de P3: $V_1 \subseteq U_1$ y $V_2 \subseteq U_2$ son básicos de p , y B2 da un básico $W \subseteq V_1 \cap V_2 \subseteq U_1 \cap U_2$.

Demostración. **P1.** $\emptyset$ es abierto por vacuidad (§1.2). Para X : si $t \in X$, la familia $\mathcal{B}(t)$ no es vacía, así que existe algún $U \in \mathcal{B}(t)$, y $U \subseteq X$.

P2. Sea $p \in \bigcup_{\lambda} U_{\lambda}$. Existe λ_0 con $p \in U_{\lambda_0}$; como U_{λ_0} es abierto, hay un $V \in \mathcal{B}(p)$ con $V \subseteq U_{\lambda_0} \subseteq \bigcup_{\lambda} U_{\lambda}$.

P3. Primero para dos abiertos U_1, U_2 . Sea $p \in U_1 \cap U_2$ (si la intersección es vacía, ya es abierta). Existen $V_1, V_2 \in \mathcal{B}(p)$ con $V_1 \subseteq U_1$ y $V_2 \subseteq U_2$, y por B2 existe $W \in \mathcal{B}(p)$ con $W \subseteq V_1 \cap V_2 \subseteq U_1 \cap U_2$ (Figura 1.1.6). Para n abiertos, por inducción: si $U_1 \cap \dots \cap U_{n-1}$ es abierto, lo es su intersección con U_n por el caso de dos. ■

🔍 Qué usa cada apartado

Parte	Usa	Idea
P1	$\mathcal{B}(t) \neq \emptyset$	Todo punto tiene algún básico, y todo básico cabe en X
P2	Solo la definición de abierto	El básico que sirve en un U_{λ_0} sirve en la unión
P3	B2 e inducción	Dos básicos dentro de U_1 y U_2 ; B2 da uno dentro de los dos

Fijate en lo que **no** aparece: ni B1 ni B3. Volveremos sobre ello en el Lema 1.1.2.

🗣️ Voz docente

¿Por qué P3 se queda en lo finito? La inducción demuestra el resultado para cada n , pero nunca «para infinitos». En un espacio métrico se ve muy claro: el mínimo de finitos radios positivos es positivo, pero el ínfimo de infinitos puede ser 0, y entonces no queda ninguna bola dentro de la intersección.

❌ Contraejemplo 1.1.7 — Una intersección infinita de abiertos que no es abierta

En $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$, los intervalos $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, $n \geq 1$, son abiertos, pero

$$\bigcap_{n \geq 1} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\},$$

que no es abierto: el 0 es testigo, porque ningún $(-\varepsilon, \varepsilon)$ cabe en $\{0\}$. Para la igualdad: si $x \neq 0$, basta tomar n con $\frac{1}{n} \leq |x|$ para que $x \notin (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$. Los radios $\frac{1}{n}$ tienen ínfimo 0.

✏️ Ejemplo 1.1.15 — Las semirrectas como uniones

$(a, +\infty)$ es abierto en $\mathcal{T}_u$ porque es unión de intervalos abiertos acotados:

$$(a, +\infty) = (a, a+2) \cup (a+1, a+3) \cup (a+2, a+4) \cup \dots = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a+n, a+n+2),$$

y basta aplicar P2. Análogamente para $(-\infty, a)$.

📖 Libro: Ejemplo 8

⚠️ Punto crítico: ¿desde dónde cuenta n ?

La unión empieza en $(a, a+2)$, que corresponde a $n = 0$. Con $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ la unión sería $(a+1, +\infty)$ y se perdería el trozo $(a, a+1]$. Por eso fijamos $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. (En el Ejemplo 1.1.7 probamos lo mismo directamente con la definición, sin uniones.)

Corolario 1.1.2 — Los abiertos son las uniones de básicos

Un conjunto $A \subseteq X$ es abierto en $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ si y solo si es unión de una familia de básicos, es decir, de elementos de $\bigcup_{p \in X} \mathcal{B}(p)$.

Demostración. Si A es abierto, cada $t \in A$ está en algún básico contenido en A (uno de $\mathcal{B}(t)$, por la definición, que contiene a t por B1); luego A es la unión de todos los básicos contenidos

en A . Recíprocamente, los básicos son abiertos (Lema 1.1.1) y una unión de abiertos es abierta (P2). El conjunto vacío es la unión de la familia vacía. ■

✖ Contraejemplo 1.1.8 — Los básicos no forman, por sí solos, una topología

La familia $\{\emptyset\} \cup \bigcup_p \mathcal{B}(p)$ no tiene por qué ser una topología. En $\mathbb{R}$ con los intervalos centrados, $(0, 1)$ y $(2, 3)$ son básicos, pero $(0, 1) \cup (2, 3)$ no es un intervalo, así que no es un básico de ningún punto: falla P2. Los básicos son abiertos, pero los abiertos son sus **uniones**. Esta idea es el punto de partida del Tema 1.2 (base de una topología). ■ Libro: observación de la pág. 11

Para qué sirve cada axioma

La definición de abierto tiene sentido para *cualquier* colección de familias $\{\mathcal{B}(p)\}_{p \in X}$, sean o no un sistema de bases. Eso permite preguntar qué aporta exactamente cada axioma.

Lema 1.1.2 — El papel de cada axioma

Sea $\{\mathcal{B}(p)\}_{p \in X}$ una colección de familias **no vacías** de subconjuntos de X , y sea $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ la familia de conjuntos abiertos según la Definición 1.1.3.

- (a) Si se cumple B2, entonces $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ cumple P1, P2 y P3.
- (b) Se cumplen B1 y B3 si y solo si, para todo p , cada $U \in \mathcal{B}(p)$ es un abierto de $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ que contiene a p .

Demostración. (a) Es la demostración de la Proposición 1.1.3, que solo usa $\mathcal{B}(t) \neq \emptyset$ y B2.

(b) Si se cumplen B1 y B3, cada $U \in \mathcal{B}(p)$ contiene a p por B1 y es abierto por el argumento del Lema 1.1.1, que solo usa B3. Recíprocamente, si cada $U \in \mathcal{B}(p)$ es abierto y contiene a p , se cumple B1; y si $q \in U$, como U es abierto, la definición da $V \in \mathcal{B}(q)$ con $V \subseteq U$, que es B3. ■

Axioma	Qué garantiza	Qué pasa si falla
$\mathcal{B}(p) \neq \emptyset$	X es abierto (P1)	Si $\mathcal{B}(p) = \emptyset$, ningún conjunto que contenga a p es abierto; tampoco X .
B2	Intersecciones finitas de abiertos son abiertas (P3)	Contraejemplo 1.1.2: los abiertos son $\emptyset, \{a, b\}, \{a, c\}, X$, y $\{a, b\} \cap \{a, c\} = \{a\}$ no es abierto. No hay topología.
B3	Los básicos son abiertos	Contraejemplo 1.1.3: los abiertos son $\emptyset, \{c\}, \{b, c\}, X$. Es una topología, pero el básico $\{a, b\}$ no es abierto. En $\mathbb{R}$: Ejercicio 1.1.2.
B1	Los básicos de p contienen a p	Contraejemplo 1.1.1: los abiertos son $\emptyset, \{b\}, X$. Es una topología, pero el «básico» $\{b\}$ de a no contiene a a : no describe la cercanía de a .

Voz docente

El nombre del concepto lo resume todo. «Bases»: B2, los básicos se pueden afinar. «Entornos de p »: B1, rodean a p . «Abiertos»: B3. Cuando en un examen te pregunten por qué hace falta un axioma, esta tabla es la respuesta.

El recíproco: de los abiertos a las bases

Proposición 1.1.4 — Una familia con P1-P3 determina un sistema de bases

Sea $X \neq \emptyset$ y sea $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una familia que cumple P1, P2 y P3. Para cada $p \in X$ sea

$$\mathcal{H}(p) = \{U \in \mathcal{H} : p \in U\}.$$

Entonces $\{\mathcal{H}(p)\}_{p \in X}$ es un sistema de bases de entornos abiertos de X , y la topología que determina es exactamente $\mathcal{H}$.  Libro: Prop. 2

Demostración. $\mathcal{H}(p)$ **no es vacía:** $X \in \mathcal{H}$ por P1 y $p \in X$, luego $X \in \mathcal{H}(p)$. (El libro omite este paso, pero la Definición 1.1.1 lo exige.)

B1. Por la definición de $\mathcal{H}(p)$.

B2. Si $U, V \in \mathcal{H}(p)$, entonces $W = U \cap V \in \mathcal{H}$ por P3 y $p \in W$; luego $W \in \mathcal{H}(p)$ y $W \subseteq U \cap V$.

B3. Si $U \in \mathcal{H}(p)$ y $q \in U$, entonces $U \in \mathcal{H}(q)$; basta $V = U$.

Sea ahora $\mathcal{T}$ la topología determinada por $\{\mathcal{H}(p)\}$. Probamos $\mathcal{T} = \mathcal{H}$ por doble inclusión.

$\mathcal{H} \subseteq \mathcal{T}$. Si $U \in \mathcal{H}$ es no vacío, para cada $t \in U$ es $U \in \mathcal{H}(t)$ y $U \subseteq U$; luego U es abierto. Y $\emptyset \in \mathcal{T}$ siempre.

$\mathcal{T} \subseteq \mathcal{H}$. Si $V \in \mathcal{T}$, cada $t \in V$ tiene un $U_t \in \mathcal{H}(t)$ con $U_t \subseteq V$; entonces $V = \bigcup_{t \in V} U_t$, que está en $\mathcal{H}$ por P2 (si $V = \emptyset$, está en $\mathcal{H}$ por P1). 

Punto crítico: no confundas $\mathcal{H}$ con $\mathcal{T}$

En esta demostración hay dos familias: $\mathcal{H}$, que es un dato, y $\mathcal{T}$, que se *construye* a partir de los $\mathcal{H}(p)$. El error típico es decir que los elementos de $\mathcal{H}$ «son abiertos» antes de haber construido $\mathcal{T}$, y la demostración se vuelve circular. Nombra las dos familias y prueba la igualdad por doble inclusión.

Ampliación — FUERA DE TEMARIO

Escribir $V = \bigcup_{t \in V} U_t$ supone *elegir* un U_t para cada punto, lo que en general usa el axioma de elección. Se evita escribiendo $V = \bigcup \{U \in \mathcal{H} : U \subseteq V\}$: la unión de todos los elementos de $\mathcal{H}$ contenidos en V .

Tras la Proposición 1.1.4, el libro concluye: «Diremos entonces, sin más, que $\mathcal{H}$ es una topología de X ». Es el nacimiento de la definición moderna.

Definición 1.1.6 — Topología

Una **topología** en un conjunto $X \neq \emptyset$ es una familia $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ que cumple P1, P2 y P3. Sus elementos se llaman **abiertos**.  Libro: pág. 11

Teorema 1.1.1 — Dos puertas, una sola estructura

Sea $X \neq \emptyset$.

- (i) Todo sistema de bases de entornos abiertos $\mathcal{B}$ determina una topología $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.
- (ii) Toda topología $\mathcal{T}$ es la topología determinada por el sistema $\{\mathcal{T}(p)\}_{p \in X}$, con $\mathcal{T}(p) = \{U \in \mathcal{T} : p \in U\}$.
- (iii) Dos sistemas determinan la misma topología si y solo si son equivalentes.
- (iv) Si $\mathcal{B}$ es equivalente a $\{\mathcal{T}(p)\}_{p \in X}$, entonces $\mathcal{B}(p) \subseteq \mathcal{T}(p)$ para todo p : el sistema $\{\mathcal{T}(p)\}$ es el mayor de su clase.

En consecuencia, asignar a cada sistema su topología induce una biyección entre las clases de sistemas equivalentes y las topologías de X .

Demostración. (i) es la Proposición 1.1.3; (ii), la Proposición 1.1.4 con $\mathcal{H} = \mathcal{T}$; (iii), la Definición 1.1.5. Para (iv): si $U \in \mathcal{B}(p)$, entonces U es abierto (Lema 1.1.1) y contiene a p (B1), luego $U \in \mathcal{T}(p)$. La biyección: la aplicación $\mathcal{B} \mapsto \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ es sobreyectiva por (ii), y dos sistemas tienen la misma imagen exactamente cuando son equivalentes, por (iii). ■

Voz docente

Es la factorización canónica de una aplicación que conoces del Álgebra (como en el primer teorema de isomorfía): la aplicación «sistema $\mapsto$ topología» identifica los sistemas que tienen la misma imagen. Por eso, desde §1.5, trabajaremos casi siempre con $\mathcal{T}$ directamente: un sistema de bases pasa a ser una *presentación* de una topología, igual que un sistema de generadores lo es de un grupo.

Definición 1.1.7 — Topología metrizable

Una topología $\mathcal{T}$ en X es **metrizable** si existe una distancia d en X cuya topología métrica es $\mathcal{T}$.

 Libro: pág. 11

Voz docente

«Métrica» describe una topología *construida* a partir de una distancia dada. «Metrizable» es una *propiedad* de la topología: no hay distancia a la vista, solo la pregunta de si existe alguna que la produzca. En §1.5 verás topologías que no lo son.

Lo esencial de este bloque

- Los abiertos cumplen P1 (vacío y total), P2 (uniones arbitrarias) y P3 (intersecciones **finitas**).
- B2 da P3; B1 y B3 hacen que los básicos sean abiertos que contienen a su punto.
- Abierto = unión de básicos; pero los básicos solos no son una topología.
- P1–P3 bastan para reconstruir un sistema de bases: desde aquí, una topología es una familia con P1–P3.