

1.5 Espacio topológico

Objetivos de aprendizaje

- O5.1.** Distinguir conjunto, topología y espacio topológico.
- O5.2.** Comparar dos topologías por inclusión y situar cualquier topología entre la trivial y la discreta.
- O5.3.** Justificar que «ser más fina» es un orden **parcial** y dar dos topologías no comparables.
- O5.4.** Distinguir métrica de metrizable y demostrar que la topología trivial de un conjunto con al menos dos puntos no es metrizable.

Definición 1.1.8 — Espacio topológico

Un **espacio topológico** es un par $(X, \mathcal{T})$ formado por un conjunto no vacío X y una topología $\mathcal{T}$ en X . Si $\mathcal{T}$ es métrica o metrizable, el espacio se llama **métrico** o **metrizable**, respectivamente.

📖 Libro: Def. 5

Voz docente

Es un **par**: si cambias $\mathcal{T}$, cambias de espacio aunque el conjunto sea el mismo. El Laboratorio $\mathbb{R}$ es eso: un solo conjunto y cuatro espacios distintos. (El libro exige $X \neq \emptyset$; algunos textos admiten el espacio vacío. No afecta a nada de lo que haremos.)

Definición 1.1.9 — Topologías más y menos finas

Sean $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ topologías en un mismo conjunto X . Si $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$, es decir, si todo abierto de $\mathcal{T}$ es abierto de $\mathcal{T}'$, se dice que $\mathcal{T}$ es **menos fina** que $\mathcal{T}'$ y que $\mathcal{T}'$ es **más fina** que $\mathcal{T}$.

La **topología discreta** de X es $\mathcal{P}(X)$: todo subconjunto es abierto. La **topología trivial** (o indiscreta) es $\{\emptyset, X\}$.

📖 Libro: Def. 6

Proposición 1.1.5 — El orden entre topologías

Sea $X \neq \emptyset$.

- (a) «Ser menos fina que» es una relación de orden parcial en el conjunto de las topologías de X .
- (b) Para toda topología $\mathcal{T}$ en X : $\{\emptyset, X\} \subseteq \mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$.
- (c) Si X tiene al menos dos puntos, el orden no es total: hay topologías no comparables.

Demostración. (a) Es la inclusión de conjuntos, que es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

(b) La primera inclusión es P1; la segunda, que $\mathcal{T}$ es una familia de subconjuntos de X .

(c) Sean $a \neq b$ en X . Las familias $\mathcal{T}_a = \{\emptyset, \{a\}, X\}$ y $\mathcal{T}_b = \{\emptyset, \{b\}, X\}$ son topologías: contienen $\emptyset$ y X , y uniones e intersecciones de sus elementos vuelven a ser $\emptyset$, el singleton o X . Como $\{a\} \notin \mathcal{T}_b$ y $\{b\} \notin \mathcal{T}_a$, ninguna contiene a la otra. ■

Voz docente

Piensa en el grano de una fotografía: una topología **más fina** tiene más abiertos y, por tanto, **distingue más**. La discreta lo distingue todo (cada punto es un abierto por sí solo); la trivial no distingue nada (el único abierto no vacío es X). En términos de bases, por la Proposición 1.1.2: más fina significa básicos *más pequeños*, capaces de meterse dentro de los del otro sistema.

Verás el efecto en los temas siguientes. En el Tema 1.5: cuanto más fina es la topología, *menos* sucesiones convergen (en la trivial, toda sucesión converge a todo punto; en la discreta, solo las que acaban siendo constantes). En el Tema 1.6: la identidad $(X, \mathcal{T}') \rightarrow (X, \mathcal{T})$ es continua exactamente cuando $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$.

⚠ Punto crítico: la dirección de la finura

«Más fina» significa **más** abiertos, pero también básicos **más pequeños**, y es fácil mezclar las dos imágenes. Usa la topología discreta como ancla: es a la vez la que más abiertos tiene y la de básicos más pequeños, los puntos $\{p\}$. Y no des por hecho que dos topologías siempre se pueden comparar.

Aviso para el Tema 2.5: «relación de equivalencia más fina» significa clases *más pequeñas*. Es otro uso de la palabra, no lo mezcles con este.

✏ Ejemplo 1.1.16 — Laboratorio $\mathbb{R}$: la cadena de finura

Las cuatro topologías del laboratorio cumplen

$$\{\emptyset, \mathbb{R}\} \subsetneq \mathcal{T}_u \subsetneq \mathcal{T}_S \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}).$$

- El sistema $\mathcal{B}(p) = \{\mathbb{R}\}$ da la topología trivial, y el sistema $\mathcal{B}(p) = \{\{p\}\}$ da la discreta: un conjunto A es abierto si cada $t \in A$ cumple $\{t\} \subseteq A$, lo que es siempre cierto.
- $\{\emptyset, \mathbb{R}\} \subsetneq \mathcal{T}_u$, porque $(0, 1) \in \mathcal{T}_u$.
- $\mathcal{T}_u \subsetneq \mathcal{T}_S$ por el Contraejemplo 1.1.6; un testigo es $[0, 1)$.
- $\mathcal{T}_S \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R})$, porque $\{0\} \notin \mathcal{T}_S$: ningún $[0, \varepsilon)$ cabe en $\{0\}$.

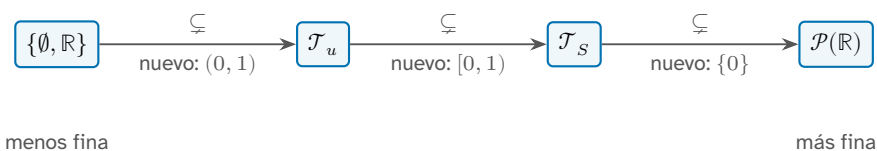


Figura 1.1.7: Laboratorio $\mathbb{R}$: cuatro topologías encadenadas. Debajo de cada flecha, un abierto que aparece en el paso.

Métrica frente a metrizable

Proposición 1.1.6 — Las distancias separan puntos

Sea (X, d) un espacio métrico. Si $x \neq y$, existe un abierto de la topología métrica que contiene a x y no contiene a y . En consecuencia:

- si X tiene al menos dos puntos, la topología trivial de X no es metrizable;
- la topología discreta sí es metrizable.

Demostración. Si $x \neq y$, entonces $r = d(x, y) > 0$ por (d1). La bola $E(x, r)$ es abierta (Lema 1.1.1), contiene a x y no contiene a y , porque $d(x, y) \not\leq r$.

(a) En la topología trivial, el único abierto que contiene a x es X , que también contiene a y . Ninguna distancia puede producirla.

(b) La **distancia discreta**, $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$ y $d(x, x) = 0$, cumple (d1)–(d3), y $E(p, \frac{1}{2}) = \{p\}$. Como cada $\{p\}$ es un básico, es abierto, y toda unión de puntos también: la topología métrica es $\mathcal{P}(X)$. ■

✖ Contraejemplo 1.1.9 — El Laboratorio F no es metrizable

En el Laboratorio F, todo abierto que contiene a c contiene también a d (mira la lista del Ejemplo 1.1.9). Por la Proposición 1.1.6, ninguna distancia en $\{a, b, c, d\}$ puede producir esa topología: la topología «no ve» la diferencia entre c y d .

Voz docente

«Métrica» describe cómo se *construyó* una topología; «metrizable», una *propiedad* que puede tener o no. Muchas distancias pueden dar la misma topología (Ejemplo 1.1.13), y muchas topologías no salen de ninguna distancia. La propiedad de separar puntos que acabas de ver es la semilla de los espacios de Hausdorff del Tema 1.5.

Ampliación — FUERA DE TEMARIO

- Un conjunto de 2 puntos admite 4 topologías; uno de 3, 29; uno de 4, 355. No se conoce una fórmula cerrada para el número de topologías de un conjunto de n puntos.
- La intersección de cualquier familia de topologías de X es una topología (compruébalo con P1–P3). La unión no: en $X = \{a, b, c\}$, la unión de $\{\emptyset, \{a\}, X\}$ y $\{\emptyset, \{b\}, X\}$ no contiene $\{a, b\}$. Por eso tiene sentido hablar de la menor topología que contiene a una familia dada: la «topología engendrada» del Tema 1.2.
- El espacio $(\{a, b\}, \{\emptyset, \{b\}, X\})$ se llama **espacio de Sierpiński**. Ya apareció en el Contraejemplo 1.1.1.

Lo esencial de este bloque

- Un espacio topológico es un par $(X, \mathcal{T})$: mismo conjunto, otra topología, otro espacio.
- Más fina = más abiertos = básicos más pequeños. Toda topología está entre la trivial y la discreta.
- El orden entre topologías es parcial, no total.
- Las distancias separan puntos: la trivial (con dos o más puntos) y el Laboratorio F no son metrizables; la discreta sí.