

1.6 Conjuntos cerrados en una topología

Objetivos de aprendizaje

- O6.1.** Demostrar que un conjunto es cerrado pasando al complementario, y que no lo es con un punto testigo **del complementario**.
- O6.2.** Dualizar enunciados con las leyes de De Morgan para familias arbitrarias.
- O6.3.** Demostrar las propiedades C1–C3 de los cerrados y su recíproco.
- O6.4.** Dar ejemplos de las cuatro combinaciones posibles de abierto y cerrado.

💡 Motivación

En Análisis, $[0, 1]$ tiene una propiedad que $(0, 1)$ no tiene: si una sucesión de puntos de $[0, 1]$ converge en $\mathbb{R}$, su límite sigue estando en $[0, 1]$. Con $(0, 1)$ falla: $\frac{1}{n} \rightarrow 0 \notin (0, 1)$. Los conjuntos que «retienen sus límites» son los cerrados. El libro los define de la forma más económica, por complementación, y la conexión con los límites llegará en los Temas 1.4 y 1.5.

📖 Definición 1.1.10 — Conjunto cerrado

En un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, un subconjunto $M \subseteq X$ es **cerrado** si su complementario $X \setminus M$ es abierto.

📖 Libro: Def. 7

✏️ Ejemplo 1.1.17 — Cerrados de la recta

En $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$:

- $[a, +\infty)$ y $(-\infty, a]$ son cerrados, porque sus complementarios $(-\infty, a)$ y $(a, +\infty)$ son abiertos (Ejemplo 1.1.7).
- $[a, b]$ es cerrado: $\mathbb{R} \setminus [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ es abierto por P2, como unión de dos abiertos.

📖 Libro: Ejemplos 9 y 10

⚠️ Errores frecuentes: «cerrado» no es «no abierto»

Un conjunto no es una puerta: puede ser abierto y cerrado a la vez, o ninguna de las dos cosas. Por eso

- de «no es abierto» no se deduce «es cerrado», y
- para probar que un conjunto *no* es *cerrado* no sirve probar que es abierto: hay que probar que su complementario no es abierto, con un punto testigo **en el complementario**.

	Cerrado	No cerrado
Abierto	$\emptyset$ y X siempre; $\{a, b\}$ en el Laboratorio F; $[a, b)$ en $\mathcal{T}_S$	$(0, 1)$ en $\mathcal{T}_u$
No abierto	$[0, 1]$ en $\mathcal{T}_u$	$[0, 1)$ y $\mathbb{Q}$ en $\mathcal{T}_u$

Lema 1.1.3 — Leyes de De Morgan para familias arbitrarias

Para toda familia $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$ de subconjuntos de X :

$$X \setminus \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda = \bigcap_{\lambda \in L} (X \setminus A_\lambda), \quad X \setminus \bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda = \bigcup_{\lambda \in L} (X \setminus A_\lambda).$$

Demostración. $x \notin \bigcup_{\lambda} A_{\lambda}$ si y solo si $x \notin A_{\lambda}$ para todo λ , es decir, $x \in \bigcap_{\lambda} (X \setminus A_{\lambda})$. La segunda igualdad es la primera aplicada a la familia $\{X \setminus A_{\lambda}\}$, tomando complementarios. ■

Proposición 1.1.7 — Propiedades de los cerrados

Sea $\mathcal{C}$ la familia de los cerrados de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$. Entonces:

(C1) $\emptyset \in \mathcal{C}$ y $X \in \mathcal{C}$.

(C2) La intersección de una familia **cualquiera** de cerrados es cerrada.

(C3) La unión de una familia **finita** de cerrados es cerrada.

Recíprocamente, si $X \neq \emptyset$ y $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ cumple C1-C3, entonces $\mathcal{T} = \{X \setminus M : M \in \mathcal{C}\}$ es una topología en X , y es la **única** cuya familia de cerrados es $\mathcal{C}$. ■ Libro: Prop. 3, con la demostración propuesta al lector

Demostración. **C1.** $X \setminus \emptyset = X$ y $X \setminus X = \emptyset$ son abiertos por P1.

C2. Si cada M_{λ} es cerrado, $X \setminus \bigcap_{\lambda} M_{\lambda} = \bigcup_{\lambda} (X \setminus M_{\lambda})$ (Lema 1.1.3) es unión de abiertos, abierta por P2.

C3. $X \setminus (M_1 \cup \dots \cup M_n) = (X \setminus M_1) \cap \dots \cap (X \setminus M_n)$ es intersección finita de abiertos, abierta por P3.

Recíproco. Con $\mathcal{T} = \{X \setminus M : M \in \mathcal{C}\}$, el mismo cálculo al revés da P1 a partir de C1, P2 a partir de C2 y P3 a partir de C3. Los cerrados de $\mathcal{T}$ son los M con $X \setminus M \in \mathcal{T}$, es decir, los de $\mathcal{C}$ (porque $X \setminus (X \setminus M) = M$). **Unicidad:** si $\mathcal{T}'$ es otra topología cuyos cerrados son $\mathcal{C}$, sus abiertos son los complementarios de los elementos de $\mathcal{C}$, es decir, $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$. ■

Voz docente

Observa el cruce. En los abiertos, lo **arbitrario** está en las uniones y lo **finito** en las intersecciones; en los cerrados, al revés. El complementario intercambia uniones e intersecciones y se lleva consigo el «arbitrario» y el «finito». Si en un examen dudas, haz el cálculo con De Morgan en una línea.

Punto crítico: dualizar mal

«Las uniones de cerrados son cerradas» es falso sin la palabra **finitas**. Ejemplo: los puntos $\{\frac{1}{n}\}$, $n \geq 1$, son cerrados en $\mathcal{T}_u$, y su unión no lo es (Contraejemplo 1.1.10).

Más ejemplos

Ejemplo 1.1.18 — En un espacio métrico, los puntos son cerrados

Si (X, d) es métrico y $p \in X$, entonces $X \setminus \{p\}$ es abierto: para $x \neq p$, la bola $E(x, d(x, p))$ no contiene a p (Proposición 1.1.6). Por C3, todo conjunto finito es cerrado. En $\mathbb{R}$, también $\mathbb{Z}$ es cerrado, porque $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n, n+1)$ es abierto.

Contraejemplo 1.1.10 — Una unión infinita de cerrados que no es cerrada

En $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$, $S = \{\frac{1}{n} : n \geq 1\}$ es unión de puntos, que son cerrados, pero S no es cerrado. El testigo, en el complementario, es 0: todo $(-\varepsilon, \varepsilon)$ contiene algún $\frac{1}{n}$, así que ningún básico de 0 cabe en $\mathbb{R} \setminus S$. En cambio, $S \cup \{0\}$ sí es cerrado: si $x < 0$ o $x > 1$, una semirrecta abierta contiene a x y no corta a $S \cup \{0\}$; si $0 < x < 1$ y $x \notin S$, entonces $\frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n}$ para algún n , y el

intervalo $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$ contiene a x y tampoco corta a $S \cup \{0\}$. Al añadir el punto al que se acumula la sucesión, el conjunto se cierra: es la idea de adherencia del Tema 1.4.

Ejemplo 1.1.19 — Laboratorio F: los cerrados

Complementando los seis abiertos del Ejemplo 1.1.9:

Abierto	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{a, b\}$	$\{c, d\}$	$\{a, c, d\}$	X
Cerrado	X	$\{b, c, d\}$	$\{c, d\}$	$\{a, b\}$	$\{b\}$	$\emptyset$

Los conjuntos $\{a, b\}$ y $\{c, d\}$ son abiertos y cerrados a la vez. En cambio, $\{c\}$ no es cerrado: su complementario $\{a, b, d\}$ no es abierto (contiene a d y no a c). En un espacio topológico general **los puntos no tienen por qué ser cerrados**; compáralo con el Ejemplo 1.1.18.

Voz docente

Que $X = \{a, b\} \cup \{c, d\}$ se parta en dos abiertos disjuntos (que por eso son también cerrados) indica que el Laboratorio F está «hecho de dos piezas separadas». Es la idea de espacio *no conexo*, que estudiarás en el Tema 3.5.

Lo esencial de este bloque

- M es cerrado si $X \setminus M$ es abierto. Abierto y cerrado no son contrarios.
- Cerrados: intersecciones arbitrarias y uniones finitas (C1–C3). Es P1–P3 pasado por De Morgan.
- Una familia con C1–C3 determina una única topología.
- En un métrico los puntos son cerrados; en un espacio topológico general, no.